تابع

تعریف زوج مرتب:

هر دو عدد حقیقی x و y که به صورت (x,y) نوشته شوند،یک زوج مرتب نامیده می شود که نمایش یک نقطه در صفحه میباشد.

تابع:

مجموعه ای از زوج مرتب ها که هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه اول یکسان نباشند را تابع گویند.

دامنه تابع:

مجموعه ای که عضو های آن از مولفه های اول زوج مرتب ها تشکیل شده باشد و با D_f نشان می دهند.

برد تابع:

مجموعه ای که از عضوهای آن از مولفه های دوم زوج مرتب ها تشکیل شده باشد را برد تابع گویند.

ضابطه تابع:

قانونی است که به وسیله آن،مؤلفه y بر حسب مؤلفه x بدست می آید و با y=f(x) نشان می دهند.

مقدار تابع:

در زوج مرتب (x,y) از تابعf ، به y مقدار تابع به ازای x گفته می شود و می نویسیم f(x)=y

متغیر مستقل: به متغیر x گفته می شود.

متغیروا بسته: چون y بر حست x بدست می آید، بنابراینy را متغیر وابسته گویند.

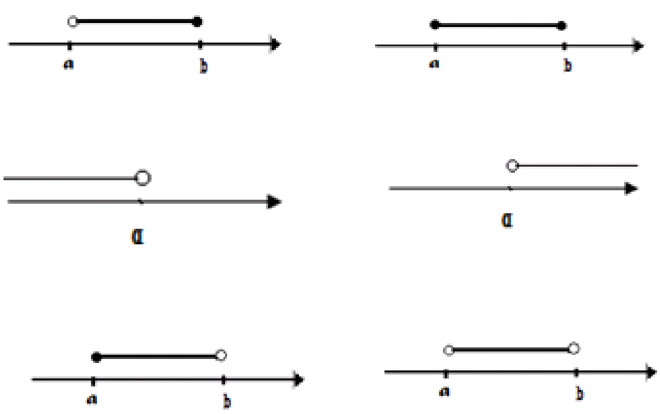
مثال:برای هر یک از توابع زیر یک ضا بطه بنویسید و آنها را راسم کنید:

f={(-۲و۴)و(-۱و۱)و(۰و۰)و(۱و۱)و(۲و۴)}

g={(-۲و۲)و(-۱و۱)و(۰و۰)و(۱و۱)و(۲و۲)}

h={(۰و۲)و(۱و۱)و(۲و۰)و(۳و-۱)و(۴و-۲)}

فاصله (بازه):



$a \le x \le b$, $[a , b]$

$a \le x \le b$, $(a , b]$

$a \le x < b$, $[a , b)$

$a < x < b$, (a , b)

$x > a$, $(a , +\infty)$

$x < a$, $(-\infty , a)$

توابع حقیقی:

توابعی هستند که دامنه و برد آنها مجموعه اعداد حقیقی یا زیر مجموعه ای از R باشند و به صورت زیر نمایش می دهند:

$f:A \longrightarrow B$

مجموعه A رادامنه و B را هم دامنه گویند. با ضابطه $y=f(x)$

برد تابع زیر مجموعهء مجموعه B می باشد.

مثال۱)
$$f:[-۱,۲] \to [۰,۵]$$
$$y = x^۲$$

مثال۲)
$$[-۲,۳] \to [۰,۴]$$
$$y = |x|$$

*نمودار توابع بالا را رسم و برد آنها را از روی شکل تعیین کنید:

*آیا مجموعه برد و هم دامنه باهم مساویند؟

تابع پوشا:

اگر مجموعه B مساوی برد تابع باشد،تابع را پوشا گویند.خط موازی با محورx ها نمودار تابع پوشا را حد اقل در یک نقطه قطع می کند.

تابع یک به یک:

خط موازی با محور x ها نمودار تابع یک به یک را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

مثال های ۱ و ۲ بالا را طوری تغییر دهید که:

الف)هردو پوشا گردند.

ب)هردو یک به یک گردند.

ج)یک به یک و پوشا گردند.

*توجه: تابعی که هم پوشا و هم یک به یک باشد ، تناظر یک به یک گویند.

مثال۱:
$$f:R \to R$$
$$y = x^۳$$

مثال ۲
$$y = R^+ \to [۲,+\infty)$$
$$y = x + ۲$$

تشخیص تابع از روی نمودار آن: خط عمود بر محور xها نمودار تابع را فقط در یک نقطه قطع می کند.

تشخیص تابع از روی ضابطه نمودار آن: اگر به ازای هر $x \in D_f$ فقط یک مقدار برای y بدست آید،آنگاه ضابطه داده شده یک تابع خواهد بود.

**تمرین:کدام یک از روابط زیر در مجموعه اعداد حقیقی یک تابع است؟

الف) $|y|+|x|=1$ ب) $x^2=a^2$

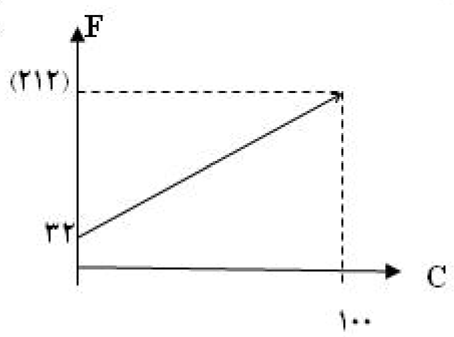
ج) $y^2=۹$ د) $y=x^3-$

هـ) $y=|x|$ و) $x=|y|$

ی) $x^2+y^2=1$

مثال:رابطه بین درجه حرارت فارنهایت(F) و سانتیگراد (C) یک تابع خطی است با ضابطه F=1/8C+32

سوال: عدد ۱/۸ چگونه بدست آمده است؟



نمودار تابع f(x)=|x|+|x-2| را رسم کرده و سپس از روی شکل برد آن را طوری تعیین کنید که پوشا گردد.

مثال: تابع دوضابطه ای $f(x)\begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ -x^{2}+1 & x<1 \end{cases}$ را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید:

یک به یک بودن و پوشا بودن توابع زیر را بررسی کنید(با رسم شکل)

الف) $f:R^{+}\rightarrow R$, $y=|x|-3$

ب) $g:(-\infty,1)\rightarrow(-\infty,2]$, $y=-x^{2}+2$

ج) $h:(-\infty,1]\rightarrow(-\infty,2]$, $y=1-|x|$

تمرین:

با رسم شکل نشان دهید که رابطه $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>2 \\ x-1 & x<3 \end{cases}$ تابع نیست.

تابع علامت:

$$Sing(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}\qquad Sing(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

<u>تمرین</u>: در توابع چندضابطه ای زیر مقادیر خواسته شده را بدست آورید:

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۵ & x\le -۱\\ -۲x+۴ & x>-۱\end{cases}\qquad f(۵)=?\quad f(-۳)=?$$

$$f(x)=\begin{cases}x\sqrt{۲} & x<۱\\ ۲x-\sqrt{۲} & x\ge ۱\end{cases}\qquad f(۳-\sqrt{۲})+f(۳-\sqrt{۲})=?$$

<u>تمرین</u>:

اگر $f(x)=|x-3|$ و $f(\square)=|a-1|$ باشد به جای $\square$ چه عبارتی را می توان نوشت؟

<u>تمرین</u>:

اگر $D_f=\{1,2,3,4\}$ دامنه $f(x)=2x-1$ باشد R_f (برد تابع) را بیابید:

<u>تساوی دو تابع</u>:دو تابع fوg با هم مساویند اگر: الف) $D_f=D_g$ باشد

ب) به ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$

<u>مثال</u>: آیا دو تابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ با هم مساویند؟

*جواب:خیر،زیرا شرط دوم برقرار نسیت.

<u>تعیین دامنه توابع</u>:

الف)توابع چند جمله ای از درجه n

ب)توابع اصم با فرجه فرد

دامنه آنها R است

ج) توابع اصم با فرجه زوج $f(x)=\sqrt{g(x)}\rightarrow g(x)\ge ۰$

مثال ۱) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ مثال۲) $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x-۲۴}$

حل۱):

$$۴-x^۲\ge ۰\rightarrow x^۲-۴\le ۰$$
$$x^۲\le ۴\Rightarrow -۲\le x\le ۲\Rightarrow Df=[-۲,۲]$$

توجه:با تعیین علامت $۴-x^۲$ به همین جواب می رسیم

**<u>تمرین</u>:دامنه عبارت های زیر را تعیین کنید:

۱) $f(x)\sqrt{۴-\sqrt{۲x-۱}}$

۲) $f(x)=\sqrt{x-|x|}$ ۳) $f(x)=\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{x^۲-۱}}$

د)<u>تابع گویا:</u> $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)} \leftarrow$ $D_f=R-\{$ریشه های مخرج$\}$

مثال:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x-1|-4}} \qquad |x-1|-4>0 \to |x-1|>4 \to x^2\underbrace{-2x-18}_{\text{جمله مشترک}}>0$$

$$D_f=(-\infty,3)\cup(5,+\infty) \qquad -3>x>5 \quad \leftarrow x_2=-3, x_1=5$$

از ریشه بزرگ بزرگتر از ریشه کوچک کوچکتر

*<u>تمرین:</u> دامنه توابع زیر را بدست آورید:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{1-x}} \qquad\qquad f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-4}} \qquad\qquad f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{|x|-4}$$

<u>توجه:</u> اشتراک دامنه های صورت و مخرج =D_f

**مثال:

$$f(x)\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{|x|-x}} \qquad x^2-1\geq 0 \to x^2\geq 1 \to \quad x\geq 1 \quad , \quad x\leq 1$$

$$|x|-x>0 \to |x|>x \to x<0$$

چون قدر مطلق اعداد منفی ازخودشان بزرگتر است. $D_f=(-\infty,-1]\cap(-\infty,0)=(-\infty,-1]$

<u>تعیین برد تابع:</u> ابتدا از ضابطه تابع y=f(x)، x را بر حسب y بدست می آوریم تا تابع به صورت x=h(y) تبدیل شود و سپس دامنه تابع x=h(y) را بدست آورده که همان برد f(x) است.

مثال):

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad\qquad f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$**R_f=[-1,1] \qquad\qquad **R_f=(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$$

$$y=\frac{x}{x^2+1} \quad \to \quad yx^2+y=x \quad \to \quad yx^2-x+y=0 \ (\Delta)$$

در این حالت برای تعیین R_f باید دلتای معادله (Δ) را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$\Delta=1-4y^2\geq 0 \quad \to 4y^2\leq 1 \quad \to y^2\leq\frac{1}{4} \quad \to \frac{-1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}$$

$$y=x+\frac{4}{x-1}$$

**تمرین: یک به یک و پوشا بودن تابع $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$ را بررسی کنید.

f:R-{-1) ➔ R-{3}

حل: فرض کنیم $f(x_1)=f(x_2)$ باشد:

$$\frac{3x_1+2}{x_1+1}=\frac{3x_2+2}{x_2+1}\longleftrightarrow(x_1+1)(3x_2+2)=(3x_2+2)(x_1+1)$$

$$3x_1x_2+2x_1+2+3x_2=3x_1x_2+3x_1+2x_2+2\Rightarrow x_2=x_1$$

بنابراین تابع یک به یک است

$$y=\frac{3x+2}{x+1}\rightarrow xy+y=3x+2\rightarrow xy-3x\ =2-y$$

$$x(y-3)=2-y$$

$x=\frac{2-y}{y-3}\rightarrow y-3\neq 0$ پوشا هم هست زیرا برد تابع با مجموعه هم دامنه مساوی است.

**تمرین:

یک به یک و پوشا بودن تابع $\begin{matrix} f:(-\infty,1]\rightarrow[2,+\infty) \\ y=1-|x| \end{matrix}$ را بررسی کنید(بدون رسم شکل)

$$y=1-|x|\Rightarrow|x|=1-y\Rightarrow 1-y\geq 0$$

$R_f=(-\infty,1]$ $\quad y\leq 1$ بنا براین پوشا نیست،زیرا ۲ یک عضور غیر فعال هم دامنه است.

یک به یک است زیرا ... $f(x_1)=f(x_2)$ ➔ $x_1=x_2$

**تابع معکوس:

هر تابعی که در دامنه تعریف خو یک به یک باشد دارای معکوس است،و معکوس f(x) را با $f^{-1}(x)$ نشان می دهند.

نمودار تابع f و معکوس آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم با هم قرینه اند.

اگر f,g معکوس یکدیگر باشند آنگاه : $f(g(x))=g(f(x))=x$

**طریقه بدست آوردن ضابطه $f^{-1}(x)$ از روی ضابطه $f(x)$:

در ضابطه y=f(x) بجای y , x و بجای x ، y قرار می دهیم تا به صورت x=f(y) در آید حال از معادله x=f(y) ،y را بدست می آوریم.ضابطه بدست آمده این عمل ، ضابطه تابع معکوس است.

*تمرین: معکوس توابع زیر را بدست آورید:

$1)\ y=\frac{3x+7}{x+2}$ $\qquad 2)\ y=-3x+2$ $\qquad 3)\ y=\sqrt{x^3+1}$

**<u>تابع همانی:</u> اگر به ازای هر x ، $f(x)=x$ باشد در اینصورت f را همانی گویند.

**<u>تابع ثابت:</u> اگر به ازای هر x متعلق به D_f ، $f(x)=b$ باشد، f را ثابت گویند

مثال: $f(x)=5$ $f(x)=-1$

محورتقارن و مرکز تقارن

۱)اگر در معادله یک منحنی x را به x– تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند محور yها (خط x=0) محور تقارن منحنی است.

$y=x^2$, $y=|x|$

به چنین توابعی تابع زوج گفته می شود. $f(x)=f(-x)$

۲) اگر در معادله یک منحنی y را به y– تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند محور xها (خط y=0) محور تقارن منحنی است.

$x=y^2$, $x=|y|$

۳) اگر در معادله یک منحنی x را به x– و y را به y– تبدیل کنیم و معادله منحنی تغییر نکند آنگاه مبداء مختصات محور تقارن منحنی است.

$x^2+y^2=4$, $|x|+|y|=1$, $y=x^3$

۲محورتقارن نیز دارد ۲محورتقارن نیز دارد فقط مرکز تقارن دارد.

۴)اگر $f(-x)=-f(x)$ باشد تابع f را فرد گوییم.

$|y|=|x|$, $y=x^3$

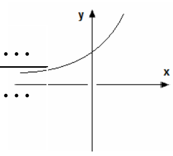
**تمرین: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید:

الف)$y=\text{Cos}x$ ب)$y=\text{Sin}2x$ ج)$y=5x^2-7$

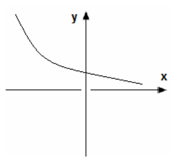
تابع نمائی یا لگاریتمی

الف) $y=a^x \xrightarrow[x\in R]{a>۱}$ مثال:a=2

X	…	-2	-1	0	1	2	…
2^x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…



ب) $y=a^x \xrightarrow[x\in R]{۰<a<۱}$ مثال : $a=\frac{۱}{۲}$



X	…	-2	-1	0	1	2	…
2^x	…	4	2	1	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	…

در حالت الف با زیاد شدن مقدار x ، y نیز زیاد می شود. پس تابع صعودی است.

در حالت ب با زیاد شدن مقدار x ، y ، کم می شود. پس تابع نزولی است.

تابع صعودی: اگر به ازای هر $x_۱,x_۲\in D_f$ به طوری که $x_۱\le x_۲$ باشد داشته باشیم $f(x_۱)\le f(x_۲)$ تابع را صعودی می گویند.و اگر $f(x_1)<f(x_2)$ باشد تابع را نزولی گویند. **هردوتابع یک به یک هستند.**

**تمرین: صعودر یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید:

الف)
$$f(x)=x^۲+۲$$
$$D_f=R\Rightarrow\begin{cases}x_۱,x_۲\in(-\infty,۰),x_۱<x_۲\to f(x_۱)>f(x_۲)\to \text{نزولی}\\ x_۱,x_۲\in(-\infty,۰),x_۱<x_۲\to f(x_۱)<f(x_۲)\to \text{صعودی}\end{cases}$$

ب) $f(x)=\frac{۲}{x+۳}$ $D_f=R-\{-۳\}$

ج) $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ $D_f=R-\{-۱\}$

تابع لگاریتمی:

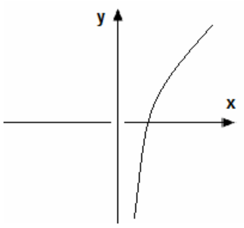
تابع نمائی در دامنه تعریف خود یک به یک است لذا معکوس دارد.

اگر اعداد ۲و ۳را داشته باشیم با عمل توان رسانی می توان به عدد ۸ رسید $۸=۲^۳$

اما اگر اعداد ۲ و ۸ را داشته باشیم چگونه می توانیم به عدد ۳ برسیم؟

چون نقش y, x را عوض کردیم پس باید تابع نمایی معکوسی تعریف کنیم که همان

تابع لگاریتمی است. $y = a^x \Leftrightarrow \log_a^y = x$



دامنه تابع لگاریتمی: $y=\log_a^x \qquad x>۰ \quad , a>۰ \quad a\neq ۱$

مثال: $y=\log_{۹-x^۲}^{x^۲-۴}$ را بدست آورید:

$$\left.\begin{array}{l} x^۲-۴>۰ \to x^۲>۴ \to x>۲ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x<-۲ \\ ۹-x^۲>۰ \to x^۲<۹ \to -۳<x<۳ \\ ۹-x^۲\neq ۱ \to x^۲ \neq ۸ \to -x \neq \pm ۲\sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=(-۳,-۲)\cup(۲,۳)-\{\pm ۲\sqrt{۲}\}$$

**تمرین : دامنه توابع زیر را بدست آورید

الف) $f(x)=\dfrac{\ln(x+۱)}{x}$

ب) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۴-x^۲}}{\ln(x-۱)} \longrightarrow =(۱,۲)$

مثال: معکوس تابع $y=۲^x+۱$ را بیابید:

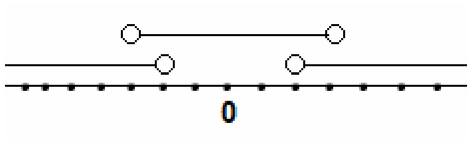
$y=۲^x+۱ \to ۲^x=y-۱ \to$ ازطرفین لگاریتم میگیریم

$\log_۲^{۲^x}=\log_۲^{y-۱} \to x\log_۲^۲=\log_۲^{y-۱} \to x=\log_۲^{y-۱} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\log_۲^{x-۱}$

**دامنه تابع لگاریتمی: $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\log_n^m \\ n\neq ۱ \qquad m>۰ \\ n>۰ \end{array}}$

**مثال: دامنه تابع زیر را بدست آورید:

$f(x)=\log_{۹-x^۲}^{x^۲-۴}$



$$x^{۲}-۴>۰ \quad \Rightarrow \; x^{۲}>-۴ \rightarrow \begin{cases} x>۲ \\ x<-۲ \end{cases} \quad (۱)$$

$$۹-x^{۲}>۰ \rightarrow ۹>x^{۲} \rightarrow ۹>x^{۲} \rightarrow -۳<x<۳$$

$$۹-x^{۲}\neq ۱ \rightarrow ۹-x^{۲}=۱ \rightarrow ۸=x^{۲} \rightarrow x=\pm\sqrt{۸}=\pm۲\sqrt{۲} \quad (۲)$$

$$D_f=۱\cap ۲=(-۳,-۲)\cup(۲,۳)-\{\pm۲\sqrt{۲}\}$$

ترکیب توابع:

اگر f(x) و g(x) دو تابع حقیقی باشند تابع gof به صورت زیر تعریف می شود:

الف) $$\left| \begin{array}{l} f: A \to B \\ g: B \to C \end{array} \right. \Rightarrow gof: A \to C$$

ب) $$\left| \begin{array}{l} f: A \to B \\ g: C \to D \end{array} \right. \xrightarrow[R_f \cap D_g \neq \phi]{\text{با شرط اینکه}} gof: A \to D$$

بنابراین دامنه gof را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$D_{fog} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال:

$$f = \{(۱,a),(۲,c),(۳,b)\}$$
$$g = \{(a,m),(b,n),(d,f)\}$$

$$\left| \begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} a \xrightarrow{g} m \xrightarrow{gof} (۱,m) \\ ۲ \xrightarrow{f} c \xrightarrow{g(c)} {}^{\text{موجود نیست}} \\ ۳ \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} n \xrightarrow{gof} (۳,n) \end{array} \right. \Rightarrow gof = \{(۱,m),(۳,n)\}$$

مثال ۲:

$$f = \{(۱,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$$
$$g = \{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۷),(۳,۷)\}$$

$$\left| \begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{gof} (۱,۳) \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{gof} (۳,۷) \\ ۲ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{gof} (۲,۷) \end{array} \right.$$

**تمرین: اگر $f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۴,۱),(۵,۲)\}$ و $g = \{(۲,۱),(۴,۲),(۱,۱)\}$ باشد gof را بیابید

بطور مشابه دامنه تعریف fog را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

بنابراین برای نوشتن تابع fog ، x ها را باید از دامنه g انتخاب کنیم.

**برای مثال های صفحه قبل و تمرین، تابع fog را تشکیل دهید:

مثال ۱)

$$\left. \begin{array}{l} a \xrightarrow{g} m \xrightarrow{f(m)} {}^{\text{موجود نیست}} \\ b \xrightarrow{g} n \xrightarrow{f(n)} {}^{\text{موجود نیست}} \\ d \xrightarrow{g} f \xrightarrow{f(f)} {}^{\text{موجود نیست}} \end{array} \right\} \to fog \;\; {}^{\text{موجود نیست}}$$

مثال ۲)

$$\left.\begin{array}{l} ۲ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{fog} (۲,۲) \\ ۴ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{fog} (۲,۵) \\ ۱ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{fog} (۱,۲) \end{array}\right\} \Rightarrow fog = \{(۲,۲),(۴,۵),(۱,۲)\}$$

**مثال: اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x+2$ در این صورت دامنه gof را تعیین کنید:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$f(x) \in D_g \to ۲x+۱ \in [۰,+\infty) \to ۲x+۱ \geq ۰ \to x \geq \frac{-۱}{۲} \quad (۱)$$

$$x \in D_f \to x \in [-۲,۲] \quad (۲) \qquad D_{gof} = (۱) \cap (۲) = [\frac{-۱}{۲},۲]$$

ضابطه gof را بدست آورید:

**تمرین: برای مثال قبل D_{fog} را بدست آورید: جواب $D_{fog}=\{0\}$

ضابطه fog را نیز بدست آورید

ترکیب توابع:

۱)تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد D_{fog} را بیابید:

۲)تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$, $g(x)=x+۲$ باشد D_{fog} و D_{gof} را بیابید:

۳) تمرین: اگر باشد D_{fog} و D_{gof} را بیابید:

۴)تمرین: اگر $f(x)=x-۱$, $fog_{(x)}=-x$ باشد ضابطه g(x) را بنویسید

۵)تمرین: اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$, $fog_{(x)}=-x$ باشد ضابطه g(x) را بنویسید

۶)تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x}$, $fog_{(x)}=\frac{x}{x+۱}$ باشد ضابطه g(x) را بنویسید

**راهنمایی: فرض کنید f(x) =u باشد.

۷)تمرین: اگر $f(x)=۲x+۱$, $fog_{(x)}=۶x-۱۱$ باشد ضابطه g(x) را بنویسید

۸)تمرین: اگر $g(x)=\frac{۲x-۱}{۳-x}$, $fog_{(x)}=۲x-۱$ باشد

۹): تمرین: اگر f(3x-7)=9x+1 باشد ضابطه f(x) را بنویسید

**راهنمایی: فرض کنید g(x) =u باشد.

حل ۷)

$$\frac{۲x-۱}{۳-x}=u \to ۳u-xu=۲x-۱ \to x=\frac{۳xu+۱}{u+۲}$$

$$f(g_{(x)})=f(u)۲(\frac{۳xu+۱}{u+۲})-۱=\frac{۵u}{u+۲}$$

بنابراین
$$f(x)=\frac{۵u}{u+۲}$$

$$D_f=x-۱\geq ۰ \to x\geq ۱ \qquad [۱,+\infty)$$

$$D_g=۱-x^۲\geq ۰ \to ۱\geq x^۲ \to -۱\leq x\leq ۱ \to [-۱,۱]$$

حل ۱)

$$x\in D_f \to x\in [۱,+\infty) \quad (۱)$$

$$f(x)\in D_g \to \sqrt{x-۱}\in [-۱,۱] \to -۱\leq \sqrt{x-۱}\leq ۱ \to ۰\leq \sqrt{x-۱}\leq ۱ \to x\leq ۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x\in [۱,۲] \to D_{gof}=[۱,۲]$$

تابع جزء صحیح

تابع $f:R\to Z$ با ضابطه $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح گویند.

هر $x\in R$ را می توان به صورت $x=n+r$ نوشت که $n\in R$ و $0\leq r<1$.

بنا بر این :

$$۰<x<۱ \to [x]=۰$$

$$۱<x<۲ \to [x]=۱$$

$$-۱<x<۰ \to [x]=-۱$$

$$-۲<x<-۱ \to [x]=-۲$$

خواص تابع جزء صحیح:

۱) $[x+k]=[x]+k \qquad k\in z$

۲) $[x]\leq x<[x]+1$

۳) $x-1<x[x]<x$

۳) $0\leq x-[x]<1$

۴) $x-1<[x]<x$

۵) $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$

مثال: حاصل عبارت $\left|[۷x]-\left|[۵x]\right|\right|$ را به ازای $x=\frac{-۱}{۲}$ بدست آورید

$$[۷x]\xrightarrow{x=\frac{-۱}{۲}}[\frac{-۷}{۲}]=[-۳,۵]=-۴$$

$$[۵x]\xrightarrow{x=\frac{-۱}{۲}}[\frac{-۵}{۲}]=[-۲,۵]=-۳$$

$$|-۴-|-۳||=|-۴-۳|=|-۷|=۷$$

**تمرین: معادله $[۲x+[۲x+[۲x]]]=۱۲$ را حل کنید:

**تمرین: توابع $y=[x+1]$, $y=[2x]$ را در فاصله [-3,3] رسم کنید:

نمونه سؤالات تابع

۱)تابع $f:[۱,+\infty)\to R^+$ با ضابطه $f(x)=x^۲-۲x+۳$ را رسم و سپس یک به یک و پوشا بودن آن را بررسی کیند:

---

۲)دامنه و برد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$ را تعیین کنید

---

۳)یک به یک بودن تابع $y=\dfrac{۲x+۱}{x-۱}$ از $R-1\to R$ را بررسی کنید:

---

۴)یک به یک و پوشا بودن تابع $f:(-\infty,۰]\to(-\infty,۲]$ با ضابطه $f(x)=۱-|x|$ را بررسی کنید.(بدون رسم)

---

۵)دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x+۲}+\sqrt{x^۲+۲x-۳}$ را بیابید:

---

۶)در مورد یک به یک و پوشا بودن تابع $f(x)=\dfrac{x+۶}{x-۱}$ تحقیق کنید:

---

۷)پوشا و یک به یک بودن تابع $f(x)=|x-۲|+۱$ را بررسی کنید:

---

۸) پوشا و یک به یک بودن تابع $f:R\longrightarrow R-۳$ با ضابطه $f(x)=\dfrac{۳x+۲}{x+۱}$ بررسی کنید:

---

۹)به کمک رسم تابع $f:R\longrightarrow R$ با ضابطه $f(x)=x|x|$ یک به یک و پوشا بودن آن را بررسی نمائید.

---

۱۰) پوشا و یک به یک بودن تابع $f:R\longrightarrow R$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ x-۱ & x<۰\end{cases}$ را بررسی کنید.

---

۱۱)تابع $f:[-۲,۳]\longrightarrow[۰,۴]$ با ضابطه $y=|x|$ را رسم کرده و پوشا و یک به یک بودن آن را بررسی نمایید.

---

۱۲)ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x|+|x+۲|$ را رسم کرده و سپس از روی شکل برد آن را طوری تعیین کنید که پوشا گردد.

---

۱۳)تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x\geq ۱\\ -x^۲+۱ & x<۱\end{cases}$ را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

---

۱۴) دامنه و برد تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x>۰\\ ۱ & x=۰\\ ۲-x^۲ & x<۰\end{cases}$ از روی شکل مشخص کنید.

---

۱۵)تابع $\begin{cases}f:R^+\longrightarrow R\\ y=|x|-۳\end{cases}$ مفروض است، یک به یک بودن آن را بررسی نمایید. برای این که تابع f پوشا گردد برد آن را چگونه باید تعریف کرد؟

---

۱۶)تابع $\begin{matrix}f:R^+\longrightarrow R\\ y=|x|-۱\end{matrix}$ را مانند مثال بالا بررسی کنید.

---

۱۷) معکوس توابع زیر را بدست آورید:

$۱)\ f(x)=\dfrac{۳x+۷}{x+۲}$ $\qquad ۲)\ f(x)=\sqrt{x^۳+۱}$

$۳)\ f(x)=۲^x+۱$ $\qquad ۴)\ f(x)=x^۲+۱ \quad x\leq ۰$

---

۱۸)دامنه توابع زیر را بدست آورید:

$1)\ f(x)=\sqrt{4-x^2}$ $\qquad$ $2)\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$

$3)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{|x|-4}$ $\qquad$ $4)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{|x|-x}}$

**توجه: دامنه تمرینات ۳و۴ برابر است با اشتراک دامنه های صورت و مخرج

---

۱۹) b,a را چنان تعیین کنید که دامنه تابع زیر R باشد.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+(a+1)x+a}{x^2+bx+4}}$$

---

۲۰)برد توابع زیر را حساب کنید.

$1)\ y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad$ $2)\ y=\dfrac{x}{x^2+1}$

$3)\sqrt{x^2+2x+3}$ $\qquad$ $4)\ y=\sqrt{x(1-x)}$

---

۲۱)دامنه تابع زیر را بدست آورید:

$$y=\log_{(9-x^2)}(x^2-4)$$

---

۲۲)زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی نمایید.

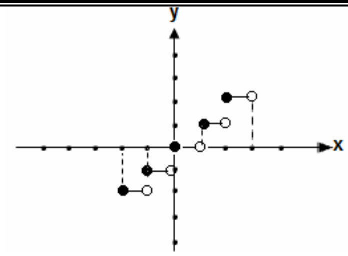
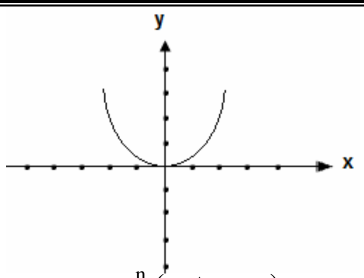
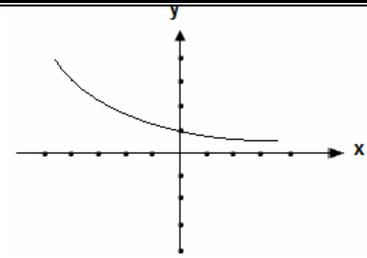
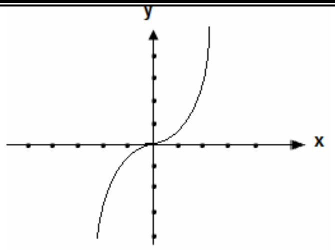
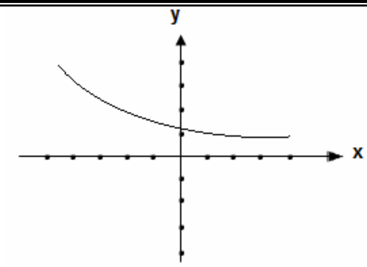
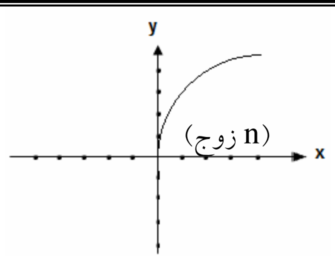
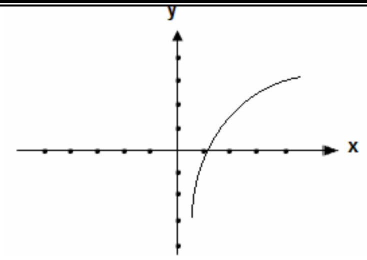
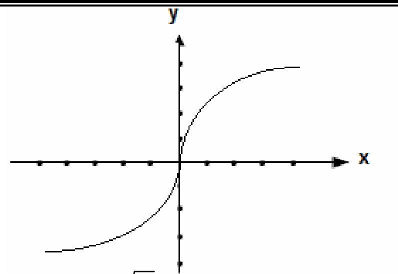
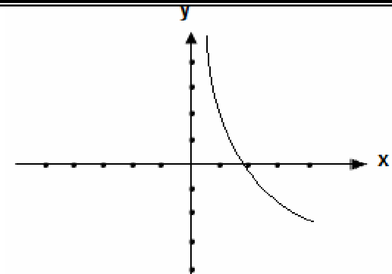
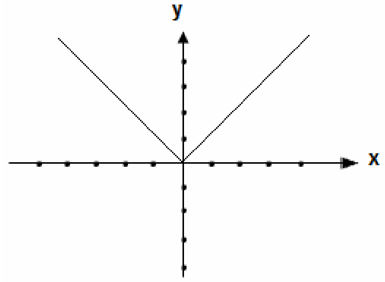
$1)\ y=(x^2+2x)^2$ ن‌ف – ن – ز – ن $\qquad$ $2)\ y=\sqrt{-Sin^2\pi x}$ ز

$3)\ y=\sqrt{[x]+[-x]}$ ف – ز

---

۲۳)نشان دهید محور x ها محور تقارن تابع زیر است. $x=y^2+\dfrac{1}{2}$, $x=|y|$

جدول نمودار توابع مهم

 $y=\|x\|$	 $y=x^n$ (زوج باشد n)
 $y=a^x$ x>	 $y=x^n$ ($n \neq 1$ و فرد n)
 $y=a^x$ (0x<a<1)	 $y=\sqrt[n]{x}$ (زوج باشد n)
 $y=\log_a^x$ $(a>1)$	 $y=\sqrt[n]{x}$ (باشد $n \neq 1$, فرد n)
 $y=\log_a^x$ $(0<a<1)$	 $\|y\|=\|x\|$

حد

مفهوم حد: بررسی رفتار تابع در اطراف نقطه ای به طول a و بسیار نزدیک به aرا حد می گویند.

حد چپ: یعنی x از سمت چپ به a نزدیک می شود $x \longrightarrow a^{-}$

حد راست: عنی x از سمت راست به a نزدیک می شود $x \longrightarrow a^{+}$

تعریف همسایگی : عدد حقیقی a را در نظر می گیریم، مجموعه اعداد حقیقی x که در بازه $(a-\delta, a+\delta)$ وجود دارند را یک همسایگی به مرکز a و شعاع δ گویند.

بنابر این به ازای هر x یک $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ باشد داریم: $|x-a|<\delta$

وقتی می گوییم که x را به سمت a میل می کند یعنی x متعلق است به شعاع همسایگی.

تعریف حد: وقتی می گوییم که lim f(x)=L بدین معنی است که اگر x را به قدر کافی به a نزدیک کنیم یعنی $|x-a|<\delta$، آنگاه f(x) را به هر اندازه که بخواهیم می توانیم به L نزدیک نماییم. یعنی $|f(x)-L|<\varepsilon$

اپسیلون(ε) یک عدد مثبت بسیار کوچک است.

مثال: تابع f را که به صورت معادله ی: $f(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

تعریف می شود در نظر بگیرید . f برای تمام مقادیر x بجز یک تعریف می شود .مقادیر تابع را وقتی که x نزدیک به یک اما مخالف با یک است بررسی می کنیم .

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	...
$f(x)$	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	...

x	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	...
$f(x)$	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.002	...

با توجه به جدول دیده می شود که اگر x رابه اندازه کافی به یک نزدیک کنیم مقدار تابع رابه هر اندازه که بخواهیم به عدد ۵ نزدیک کنیم .یعنی اگر $|x-1|$ به اندازه کافی کوچک اختیار شود،

$|f(x)-5|$ می تواند به هر اندازه دلخواه کوچک شود . با استفاده از دو علا مت به جای این دو اختلاف می توان مطلب را دقیقتر بیان کرد.

علائمی که به کار برده می شوند عبارتند از ε (اپسیلون) و δ (دلتا) . بدین ترتیب می گوئیم

$|f(x)-5|$ از هر عدد مثبت مفروض کوچکتر می شود به شرطی که $|x-1|$ از عدد مثبتی چون δ که به طور مناسب اختیار می شود کوچکتر باشد به شرطی که $|x-1| \neq 0$ (چون $x \neq 1$)

بنابراین می نویسیم : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

اگر x را طوری محدود کنیم که روی محور افقی بین $1-\delta$ و $1+\delta$ قرار گیرد $f(x)$ روی محور قائم بین $5-\varepsilon$ و $5+\varepsilon$ قرار می گیرد .

مثال ۱ : فرض کنید

$f(x) = 4x-1$. اگر $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 11$ دلتائی برای $\varepsilon = 0.01$ بیابید .

$$|f(x)-11| = |4x-1-11| = |4x-12| = 4|x-3|$$

بنابراین مایلیم وقتی که $0<|x-3|<\delta$ آنگاه

$4|x-3|<0.01$ یا $|x-3|<0.0025$

در این مثال δ ی مورد نظر می تواند هر عدد مثبت کوچکتر از ۰٫۰۰۲۵ باشد .

مثال۲ :برای تابع $f(x)=\dfrac{3x^2+8x-3}{x+3}$ داریم :

$\lim_{x\to -3} f(x)=-10$ برای $\varepsilon=0.15$ ، δ بیابید

حل:
$$|f(x)-(-10)| = \left|\frac{(x+3)(3x-1)}{x+3}+10\right| = |3x+9| = 3|x+3|$$

بنابراین مایلیم وقتی که $0<|x+3|<\delta$ آنگاه $3|x+3|<0.15$ در نتیجه $\delta \le 0.05$

نکته: عدد تقسیم بر صفر تعریف نشده است. یعنی $\dfrac{A}{0}$ صفر مطلق

صفر حدی یعنی: $\left.\begin{matrix} 0^+ \\ 0^- \end{matrix}\right\}$ و در نتیجه داریم : $\dfrac{A}{0^-}=-\infty,\ \dfrac{A}{0^+}=+\infty$

نکته: تابع y=f(x) در نقطه $x=x_0$ دارای حد می باشد به شرطی که :

۱)تابع f(x) در همسایگی نقطه x تعریف شده باشد. یعنی: $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

۲)حدود چپ و راست تابع در نقطه x_0 موجود و متناهی و مساوی باشند.

قضایای حد :

1) f(x)=k تابع ثابت $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=k$

2) f(x)=x تابع همانی $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=a$

3) f(x)= ax+b $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=ax_0+b$

نتیجه: حد توابع چندجمله ای در نقطه x_0 برابر است با مقدار تابع در x_0

مثال) $f(x)=۳x^۳-۲x^۲+x-۱$

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=۳(-۲)^۲-۲(-۲)^۲+(-۲)-۱=-۳۵$$

نکته: در توابع کسری اگر $x\to a$ میل کند و a ریشه مخرج نباشد، حد تابع برابر است با مقدار تابع در آن نقطه(x_0)

مثال) $f(x)=\dfrac{۲x}{x-۱} \longrightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)=\dfrac{۴}{۲-۱}=۴$

**نکته: در موارد زیر برای محاسبه حد تابع، باید حد چپ و راست را محاسبه نمود

۱)**حد توابع چند ضابطه ای**

۲)**حد توابع قدرمطلقی** (a ریشه معادله f(x)=0باشد) $\lim_{x \to a} |f(x)|$

۳)**حد توابع جز صحیح** $\lim_{x \to a}[x] \quad , a \in z$

۴)**حد توابع کسری و a ریشه مخرج باشد.** $\lim_{x \to a} \frac{A}{f(x)}$

۵)**حد توابع اصم با فرجه زوج** $\lim_{x \to a} \sqrt[۲k]{f(x)}$

**تذکر: در این حالت ابتدا باید f(x) را تعیین علامت کنیم،چون ممکن است یکی از حدود چپ و راست به علت منفی بودن f(x) موجود نباشد.

۶)**حد تانژانت و کتانژانت وقتی که:** $\lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{۲}} \tan(x) \quad , \quad \lim_{x \to k\pi} \cot(x)$

تمرین: حد های زیر را حساب کنید:

1) $\lim_{x \to ۱} \frac{۲x}{x-۱}$

2) $\lim_{x \to ۱} \frac{۲+x}{۱-x}$

3) $\lim_{x \to ۲} \frac{۳x+۵}{x^۲-۴}$

4) $\lim_{x \to ۱} \sqrt{x^۲-۱}$

5) $\lim_{x \to -۳} \frac{\sqrt{x^۲-۹}}{x-۳}$

6) $\lim_{x \to ۱} \frac{|x-۱|}{x^۲-۱}$

7) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

8) $\lim_{x \to -۱^+} \frac{[x]+۱}{x^۲-۱}$

۹) به ازای چه مقدار از a تابع f(x) در نقطه ۲ $x_۰ =$ دارای حد است؟

f(x)=a[x]+[x+2]

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۴^+} \dfrac{[x-۴]}{x-[x]}$

حل: $\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۴^+} \dfrac{[x]-۴}{x-[x]} = \lim\limits_{x\to ۴^+} \dfrac{[۴+\delta]-۴}{۴+\delta-[۴+\delta]} = \lim\limits_{x\to ۴^+} \dfrac{۴-۴}{۴+\delta-۴} = \dfrac{۰}{\delta} = ۰$

۱۱) $\lim\limits_{x\to (-\frac{۱}{۵})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to (-\frac{۱}{۵})^-} \dfrac{[۵x+۱]}{۵x+۱} = \lim\limits_{\to (-\frac{۱}{۵})^-} \dfrac{[۵x]+۱}{۵x+۱} = \lim\limits_{\to (-\frac{۱}{۵})^-} \dfrac{\left[۵(\frac{-۱}{۵})^-\right]+۱}{۵(\frac{-۱}{۵})^- +۱} = \lim \dfrac{[-۱-\delta]+۱}{-۱-\delta+۱} = \lim \dfrac{-۲+۱}{-\delta} = \dfrac{-۱}{۰^-} = +\infty$

۱۲) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = \begin{cases} x^۲+۲ & x \geq -۱ \\ -x^۲+۲ & x < -۱ \end{cases}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = \begin{cases} x+۱ & x \geq -۱ \\ -x^۲+۴ & x < -۱ \end{cases}$

****<u>توجه:</u>** اگر $a \in Z$ نباشد آنگاه حد $[x]$ برابر است با حد $[a]$

$$\lim_{x\to a^-}[x] = \lim_{x\to a^+}[x] = [a]$$

**محاسبه حد کسرهای که به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ هستند:

(تمرین

۱) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x^۲-۴}{x^۲-۲x-۸}$

۲) $\lim\limits_{x\to -۳} \dfrac{x^۲-۵x-۲۴}{x^۲-۹}$

****<u>توجه:</u>** برای رفع ابهام باید صورت و مخرج را تجزیه کرد تا عامل صفر کننده حذف شود

۳) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x-۵}{\sqrt{x-۱}-۲}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}$

****<u>توجه:</u>** صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

۵) $\lim_{x \to ۲} \frac{۱}{x-۲} - \frac{۱۲}{x^۳-۸} = \infty - \infty$ مبهم

*<u>**راهنمائی:**</u> مخرج مشترک گرفته و پس از ساده کردن حد می گیریم. جواب= $\frac{۱}{۲}$

<u>**حد توابع مثلثاتی:**</u>

$$\lim_{x \to \alpha} \sin x = \sin \alpha \qquad \lim_{x \to \alpha} \cos x = \cos \alpha$$

$$\lim_{x \to \alpha} \tan x = \tan \alpha \qquad \lim_{x \to \alpha} \cot x = \cot \alpha$$

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \qquad x \neq k\pi$$

مثال)

۱) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \tan \frac{x}{۲} - \cot ۳x$

۲) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} \tan(x-\pi)$

۳) $\lim_{x \to (\frac{\pi}{۲})^+} \tan x = \lim_{x \to ۰} \tan(\frac{x}{۲}+\alpha) = \lim_{x \to ۰}(-\cot a) = -\infty$

۴) $\lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{-\cos x} = \lim \frac{۱}{۱-۱^-} = \frac{۱}{۱-(۱-\delta)} = \frac{۱}{\delta} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

تمرین) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱+\cos x}{۱-\sin x} = ?$

قاعده هم ارزی در سینوس و تانژانت:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{ax}=\lim_{x\to ۰}\frac{ax}{\sin ax}=۱ \qquad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ax}{ax}=\lim_{x\to ۰}\frac{ax}{\tan ax}=۱ \qquad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲} x}{x^n}=۱ \qquad \lim_{x\to ۰}\frac{\tan^{۲} x}{x^n}=۱$$

تمرین: حد های زیر را حساب کنید:

۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲x}{\sin ۷x}$ ۲) $\lim_{x\to ۰}\frac{\cot ۷x}{\cot ۳x}$

۳) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{۲}-x}$ ۴) $\lim_{x\to ۰}\frac{۶x-\sin ۲x}{۲x+۳\sin ۴x}$

۵) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲} ۳x}{x^{۲}}$ ۶) $\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}\tan^{۳} x}{\sin x^{۲}}$

۷) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{2x(1-\cos x)}$ ۸) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos x}$

۹) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^{۲}}$

راهنمایی:

$$\cos x=\cos^{۲}\frac{x}{۲}-\sin^{۲}\frac{x}{۲} \quad\Rightarrow\quad \cos x=۱-۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

$$۱-\cos x=۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$$

حل چند مثال:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{[x^۲]-x^۲}{x^۲}$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۰-x^۲}{x^۲} = -۱$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۰-x^۲}{x^۲} = -۱$$

۲) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} \frac{x^۲-۴}{x+۲} sign(x+۲) = \lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x+۲)} sign(x+۲) = \lim\limits_{x\to -۲^-}(x-۲)sign(۰^-) = -۴\times(-۱) = ۴$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۹)\sin\frac{۱}{x-۳}$ $\qquad$ حل:

وقتی $x \to ۳$ میل میکند $(x^۲-۳)$ برابر با صفر است پس جواب صفر است.

۴) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{[x]-۲}{x^۲-۴} = ۰$ $\qquad \lim \frac{[۲+\delta]-۲}{۰^+} = \frac{۲-۲}{۰^+} = ۰$ $\qquad x^۲-۴=۰ \Rightarrow x=\pm ۲$

	-∞	-2		2	+∞
$x^۲-۹$	+	0	-	0	+

۶) حل به روش هوپیتال(در بخش کاربرد مشتق گفته می شود)

$$\lim_{x\to ۰} \frac{e^x-۱}{۲x}$$

۷) **هوپیتال**

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{\cos^{-۱} x}{\sqrt{۱-x}}$$

---

۸) صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{x+\sqrt{x+۲}}{x^۲-x-۲} = \frac{۰}{۰}$$

جواب $\frac{-۱}{۲}$

حل یک مثال:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} (\sin x + \cos x)^{\tan x} = ?$$

وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ میل کند، حد به صورت 1^{∞} در می آید.

فرض می کنیم: $y = (\sin x + \cos x)^{\tan x}$

از طرفین رابطه زیر Ln می گیریم.

$$Lny = \tan x Ln(\sin x + \cos x) \xrightarrow{\text{حد می گیریم}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} (Lny) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \tan x Ln(\sin x + \cos x) = \infty \times ۰ \to$$

به $\frac{۰}{۰}$ تبدیل می کنیم

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{Ln(\sin x + \cos x)}{\cos x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{ه}} \ldots = ۱ \to \lim y = e$$

حد در بی نهایت($x \to \infty$)

الف) **توابع کسری:**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^m + bx^{m-۱} + \ldots + k}{a'x^n + b'x^{n-۱} + \ldots + k'}$$

از بالاترین توان x در صورت و مخرج فاکتور می گیریم.

مثال) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^۳ + ۶x^۲ + ۱۰x}{۲x^۳ + x^۲ + ۵} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^۳ (۱ + \frac{۶}{x} + \frac{۱۰}{x^۲} + \frac{۲}{x^۳})}{x^۳ (۲ + \frac{۱}{x} + \frac{۵}{x^۳})} = \frac{۱}{۲}$$

مثال) $$\lim_{x \to^{-} \infty} \sqrt{\frac{x + ۱}{۴x - ۱}} = \lim_{x \to^{-} \infty} \sqrt{\frac{x(۱ + \frac{۱}{x})}{x(۴ - \frac{۱}{x})}} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \pm\frac{۱}{۲} \text{ ق ق } + \frac{۱}{۲}$$

نکته: اگر f(x) از درجه m باشد و g(x) از درجه n دو چند جمله ای باشند آنگاه:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m}{b_m x^n} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_m} & m = n \\ \infty & m > n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{5n^3 + n + 1} = ?$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{5n^3 + n + 1}{1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^3}{30n^3} = \frac{3}{30} = \frac{1}{15}$$

فقط بالاترین درجه صورت و مخرج را نوشتیم

تمرین:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{2n^2} = ?$$

جواب $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - x^4 + x^2}{3x^2 - 1}$$

جواب 1

ب) حد در بی نهایت($x \to \infty$) برای توابع اصم

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \approx \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

فرمول زوج n, a>0

مثال) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^{۲}+۱}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{۱}\,|x+\frac{۰}{۲}|=\lim\limits_{x\to\infty}|x|=\pm\infty$

مثال) $\lim\limits_{x\to+\infty}-۲x+۲+\sqrt{۴x^{۲}-۴x+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}-۲x+۲+\sqrt{۴}\,|x-\frac{۴}{۲x۴}|=\lim\limits_{x\to+\infty}-۲x+۲+۲(x-\frac{۱}{۲})=۲-۱=۱$

تمرین) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{۲}+۲۰x}-x$ جواب = ۱۰

$x\to-\infty\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{۱}\,|x+\frac{۲۰}{۲}|-x=\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+۱۰)-x=\lim\limits_{x\to-\infty}-۲x+۱۰=+\infty$

تمرین) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{۲}+x}-x$ جواب $\frac{1}{2}$

تمرین) $\lim\limits_{x\to-\infty}-۲x-\sqrt{۴x^{۲}+x+۱}$ جواب $\frac{1}{4}$

مثال) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۵x^{۲}-۶}}{۲x+۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۵}\,|x|}{۲x}=\frac{-\sqrt{۵}x}{۲x}=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

****تمرین**: اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^{۲}+x+۱}-ax-b=۰$ باشد، آنگاه b,a را پیدا کنید:

جواب $a=-۱$

$b=\frac{۱}{۲}$

پیوستگی

تابع $f(x)$ را در نقطه ی $x=a$ پیوسته گویند ، هرگاه در شرایط زیر صدق کند :

الف) $f(a)$ موجود وعدد حقیقی باشد .

ب) حد چپ وحد راست در $x=a$ موجود باشند .

ت) $$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

در صورتی که یکی از شرایط بالا برقرار نباشد ، گوئیم تابع در آن نقطه نا پیوسته یا گسسته است .

ودر صورتی که حد چپ با مقدار تابع برابر باشد پیوستگی چپ و در صورتی که حد راست با مقدار تابع برابر باشد پیوستگی راست دارد .

مثال : فرض کنید : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<b\\ 1-\dfrac{1}{4}x & x\ge b\end{cases}$، مقدار b راطوری بیابید که تابع در b پیوسته باشد .

$$1-\frac{1}{4}b=\frac{1}{b}\Rightarrow 4b-b^2=4\Rightarrow b^2-4b+4=0$$

وازاینجا $b=2$.

مثال ۲: فرض کنید : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{3} & x\le b\\ 2x-1 & x>b\end{cases}$، مقدار b راطوری بیابید که تابع در b پیوسته باشد .

$$\frac{b+4}{3}=2b-1\Rightarrow b=\frac{7}{5}$$

مثال ۳: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}3x+6a & x<-3\\ 3ax-7b & -3\le x\le 3\\ x-12b & 3<x\end{cases}$

مقادیر a و b راطوری بیابید که تابع در نقاط 3 و -3 پیوسته باشد .

حل: $-9+6a=-9a-7b$ و $9a-7b=9-12b$

پس $\begin{cases}15a+7b=9\\ 9a+5b=9\end{cases}\Rightarrow a=\frac{3}{2}\,;b=\frac{27}{4}$

چند تمرین از پیوستگی:

۱) مجموعه نقاط ناپیوستگی توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۴-x^{۲}} & |x|\le ۲\\ \frac{۱}{۲}x-۱ & |x|>۲\end{cases}$

در نقطه x=2 پیوسته است اما در نقطه x=-2 پیوستگی راست دارد

ب) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{۱۶-x^{۲}} & |x|\le ۴\\ x-۴ & |x|>۴\end{cases}$

در نقاط x=4 , x=-4 پیوستگی راست دارد نقاط ناپیوستگی ندارد چون همه در دامنه اش پیوسته است.

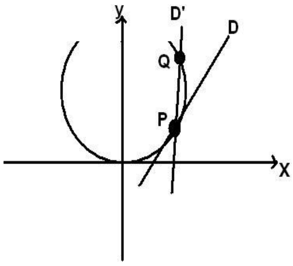
۲) تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۳}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱\\ ax+۶-a & x\leq ۱\end{cases}$ به ازای چه مقدار از a همواره پیوسته است؟

جواب: به ازای جمع مقادیر a پیوسته است.

۳)تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۳}+۱ & x\in q\\ ۳x-۱ & x\notin q\end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است؟

$$x^{۳}+۱=۳x-۱\longrightarrow x^{۳}-۳x+۲=۰$$

$$(x-۱)(x-۲)=۰\longrightarrow X=۱,۲$$



مشتق تابع

میدانیم اگر دو نقطه ی $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۱, y_۱)$ روی خط راست باشند ،
شیب خط عبارت است از:

$$\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \text{ضریب زاویه}$$

حال اگر بخواهیم شیب خط مماس بر منحنی را تعیین کنیم، فقط
یک نقطه (P) را در اختیار داریم آن هم نقطه تماس است.
نقطه Q را روی منحنی اختیار می کنیم.(از طرف چپ
یا راست نقطه ی P فرقی نمی کند) و شیب خط PQ را حساب می کنیم.
هرچقدر Q به P نزدیکتر شود شیب خط D' به شیب خط D نزدیکتر میشود.

حال اگر P(x,y) باشد آنگاه $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ و شیب خط PQ عبارتست از:

$$M' = \frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}$$

که میتوان به صورت $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ نیز نشان داد. $\Delta x = h$

اگر Q را تا حد امکان به P نزدیک کنیم، Δx به صفر نزدیک میشود بنابراین اگر از رابطه اخیر حد بگیریم شیب خط مماس بدست می آید. (همان مشتق تابع)

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ مقداری معلوم باشد (بی نهایت نباشد)

معمولاازنماد های زیر برای نشان دادن مشتق تابع f نسبت به متغیر xاستفاده می کنند:

$$D_x f \quad , \quad \frac{df}{dx} \quad , \quad f'(x)$$

یک تابع را در نقطه ای مانند x مشتق پذیز می گویند اگر در آن نقطه مشتق موجود باشد و برای مشتق پذیری یک تابع در یک بازه لازم است در هر نقطه دلخواه از بازه مشتق پذیر باشد.
اگر تابع در نقطه ای مانند c پیوسته نباشد آنگاه در c مشتق پذیر نیست.البته لازم بذکر است که پیوستگی در یک نقطه وجود مشتق را تضمین نمی کند.
مشتق یک تابع مشتق پذیر میتواند خود نیز مشتق پذیر باشد که به مشتق آن ، مشتق دوم (f'') تابع گویند . مشتق مراتب بالاتر نیز به همین ترتیب تعریف میشوند.

$F_{(x)}^{(n)} \to$ یعنی مشتق مرتبه n ام

قضیه:

اگر تابع f در x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه در x_0 پیوسته است.
عکس قضیه بالا صحیح نمی باشد مثلا تابع y=(x) در $x_0 = 0$ پیوسته است ولی مشتق ندارد.
و یا تابع $y = |x^۲ - ۴|$ در $x_0 = 1$ پیوسته است ولی مشتق ندارد.
اصولا توابع قدر مطلقی به ازای ریشه ی داخل قدر مطلق، مشتق پذیر نیستند.

تعریف حدی مشتق:

فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک بازه باز حول نقطه X تعریف شده باشد ، گوییم $f(x)$ در X مشتق پذیر است اگر حد زیر موجود باشد. (بی نهایت نباشد) مقداری معلوم باشد.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال: با استفاده از تعریف ، مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=۳x^۲-۱$$

$$f(x+h)=۳(x+h)^۲-۱=۳(x^۲+۲xh+h^۲)-۱=۳x^۲+۶xh+۳h^۲-۱$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۶xh+۳h^۲}{h}=\frac{h(۶x+۳h)}{h}=۶x+h$$

$$\lim_{h\to ۰}(۶x+۳h)\to ۶x=f'(x)$$

تمرین: مشتق توابع زیر را با استفاده از تعریف بدست آورید.

الف) $y=۲x+۵$

ب) $y=x^۳+۱$

تعریف معادل: تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول a مشتق پذیر می گوییم هر گاه حد زیر موجود باشد

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(مشتق راست) $x\to a^+$

(مشتق چپ) $x\to a^-$

مثال۱: اگز $y=\left|x^۲-۴\right|$ باشد حد مقابل را حساب کنید. $\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۲+h^۲)-f(۲)}{h^۲}$

حل:

وقتی $h\to \bar{0}$ آنگاه $h^2\to \overset{+}{0}$ میل می کند بنابر این کافیست که مشتق راست تابع را در نقطه ی بطول ۲ حساب کنیم.

$$\lim_{h\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{h\to ۲^+}\frac{x^۲-۴-۰}{x-۲}=\lim_{h\to ۲^+}x+۲=۴$$

نکته: برای اینکه تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشد باید مشتق چپ و راست با هم مساوی باشند.

مثال۲: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ رادر نقطه بطول $x=۴$ بااستفاده از تعریف بدست آورید.

<u>تمرین:</u> مشتق تابع $f(x)=x^{۲}$ رادر نقطه بطول $x=۲$ بااستفاده از تعریف بدست آورید.

مثالهایی که در آنها باید از مشتق چپ و راست استفاده کرد.:

<u>مثال۱ :</u> مشتق تابع $f(x)=|x|$ را در نقطه بطول $x=۰$ در صورت وجود بدست آورید.

<u>مثال۲ :</u> مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=۱$ در صورت وجود بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x\geq ۱ \\ ۲x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

<u>مثال۳:</u> مقادیر a وb را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه $x=۲$ مشتق پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x<۲ \\ x^{۲} & x\geq ۲ \end{cases}$$

<u>فرمول های مشتق :</u>

۱) $y=a \rightarrow y'=۰ \quad \rightarrow \quad y=۲ \rightarrow y'=۰$	
۲) $y=ax+b \rightarrow y'=a \quad \rightarrow \quad y=-۳x+۷ \rightarrow y'=-۳$	
۳) $y=u^n \rightarrow y'=nu'u^{n-۱} \quad \rightarrow \quad y=(۲x-۳)^۷ \rightarrow y'=۷(۲)(۲x-۳)^۶$ $y=x^۷ \rightarrow y'=۷x^۶$	
۴) $y=\sqrt{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}} \quad \rightarrow \quad y=\sqrt{(۲x^۲-۷)} \rightarrow y'=\frac{۴x}{۲\sqrt{۲x^۲-۷}}$	
۵) $y=\sqrt[m]{u^n} \rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}} \quad \rightarrow y=\sqrt[۶]{(۲x-۱)^۵} \rightarrow \quad y'=\frac{۱۰}{۶\sqrt[۶]{(۲x^۲-۱)^۱}}$	
۶) $y=u\times v \rightarrow y'=u'v+uv'$ $y=(۲x^۲-۱)(\sqrt{x}) \quad \rightarrow \quad y'=(۴x)(\sqrt{x})+(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۲x^۲-$	
۷) $y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^۲}$ $y=\frac{(x^۷-۶x+۱)}{۲x-۳} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{(۷x^۶-۶)(۲x-۳)-(۲)(x^۷-۶x+۱)}{(۲x-۳)^۲}$	
۸) $y=\sin u \rightarrow y'=u'\cos u \quad \rightarrow \quad y=\sin ۲x \rightarrow y'=۲\cos ۲$	
۹) $y=\cos u \rightarrow y'=-u'\sin u \quad \rightarrow \quad y=\cos\sqrt{x} \rightarrow y'=-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$	
۱۰) $y=\tan u \rightarrow y'=u'(۱+\tan^۲ u) \rightarrow y=\tan(۳x-۱) \rightarrow y'=۳(۱+\tan^۲(۳x-۱))$	
۱۱) $y=\cot u \rightarrow y'=-u'(۱+\cot^۲ u) \rightarrow y=\cot ۷x \rightarrow y'=-۷(۱+\cot^۲ ۷x)$	
۱۲) $y=e^u \rightarrow y'=u'e^u \quad \rightarrow \quad y=e^{۳x^۲-۷x+۱} \rightarrow y'=(۶x-۷)e^{۳x^۲-۷x+۱}$	
۱۳) $y=a^u \rightarrow y'=u'a^u \ln a \quad \rightarrow \quad y=۳^{۲x^۲-۱} \rightarrow y'=۴x(۳)^{۲x^۲-۱} Ln\ ۳$	
۱۴) $y=\ln u \rightarrow y'=\frac{u'}{u} \quad \rightarrow \quad y=\ln(۳x^۳-۲۷x) \rightarrow y'=\frac{۹x^۲-۲۷}{۳x^۳-۲۷x}$	
۱۵) $y=\log_a^u \rightarrow y'=\frac{u'}{u\ln a} \rightarrow y=\log_۵^{۳x^۲-۶x} \rightarrow y'=\frac{۶x-۶}{(۳x^۲-۶x)\ln ۵}$	
۱۶) $y=\sin^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}} \rightarrow y=\sin^{-۱}۲x \rightarrow y'=\frac{۲}{\sqrt{۱-۴x^۲}}$	
۱۷) $y=\cos^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{-u}{\sqrt{۱-u^۲}} \rightarrow y=\cos^{-۱}۷x \rightarrow y'=\frac{-۷}{\sqrt{۱-۴۹x}}$	
۱۸) $y=\tan^{-۱}u \rightarrow y'=\frac{u'}{۱+u^۲} \rightarrow y=\tan^{-۱}(x^۲+۱) \rightarrow y'=\frac{۲x}{۱+(x^۲+۱)^۲}$	

۱۹) $y=\cot^{-۱} u \to y'=\frac{-u'}{۱+u^۲}$
۲۰) $y=\sin^n u \to y'=nu'\cos(u)\sin^{n-۱} u \quad \to y=$
$y=\sin^۷(۲x+۱) \to y'=۷(۲)\cos(۲x+۱)\sin^۶(۲x+۱)$
۲۱) $y=\cos^n u \to y'=-nu'\sin u \ \ \cos^{n-۱} u$ $y=\cos^۵\sqrt{x} \to y'=-۵\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\cos^۴\sqrt{x}$
۲۲) $y=\tan^u n \to y'=nu'(۱+\tan^۲ u)\tan^{n-۱} u$ $y=\tan^۳ ۵x \to y'=۱۵(۱+\tan^۲ u)\tan^۲ ۵x$
۲۳) $y=\cot^n u \to y'=-nu(۱+\cot^۲ u)\cot^{n-۱} u$ $y=\cot^۳ ۲x \to y'=-۶(۱+\cot^۲ u)\cot^۲ ۲x$

تمرین : مشتق های زیر را حساب کنید ؟

۱) $y=\sqrt{x^۳}$

۲) $y=\sqrt[۳]{x^۲}$

۳) $y=\sqrt[۳]{(۲x^۲+۳)^۲}$

۴) $y=۳\cos^۲ ۵x$

۵) $y=x\|x\|$

راهنمایی : از مشتق حاصلضرب استفاده کنید

مشتق تابع مرکب:

اگر y تابعی از u باشد یعنی $y=f(u$ و نیز تابعی از x باشد آنگاه مشتق y نسبت به x برابر است با :

$$y'_x=y'_u\times u'_x$$

$$y=(۲x^۳+۳x)^۲ \to y'=۲(۲x^۳+۳x)\times(۶x^۲+۳)$$

تمرین۱ : $y=(\sqrt{x^۲+۱})^۳ \to y'=?$

راهنمایی: داخل رادیکال را u فرض کنید

مشتق را به ازای t=2 بدست آورید . $y=\sqrt{۲x}+۱\ ,\ ,x=t^{۲}-۱$: **تمرین۲**

مشتق ضمنی : اگر $f(x,y)=۰$ تابع ضمنی باشد مشتق آنرا از رابطه $f'(x,y)=-\dfrac{f'(x)}{f'(y)}$ بدست می آید.

مثال : $۳x^{۲}y-۲xy-x=۰ \longrightarrow f'(x,y)=-\dfrac{۶xy-۲y-۱}{۳x^{۲}-۲x}$

مشتق پارامتری : اگر y و x هر دو تابعی از t باشند آنگاه مشتق y نسبت به x برابر است با :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال : اگر $x=\sin t, y=۲t^{۲}+۳t-۱$ باشد مشتق y را نسبت x به بدست آورید .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۴t+۳}{\cos t}$$

تمرین : اگر $y=t^{۲}+۳t, x=e^{t}+\cos t$ باشد مطلوب است $\dfrac{dy}{dx}$ در $t=۰$

مشتق تابع معکوس : اگر $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه مشتق تابع معکوس آن برابر است با :

$$(f^{-۱})'=\frac{۱}{f'}$$

مثال : اگر $f(x)=x^{۳}+x^{۲}$ باشد مشتق $f^{-۱}$ را حساب کنید . $(f^{-۱})'=\dfrac{۱}{f'}=\dfrac{۱}{۳x^{۲}+۲x}$

تمرین: مشتق معکوس تابع $f(x)=e^{x}-\cos x$ را در نقطه بطول ۲ را بدست آورید .

مشتق عباراتی که برحسب x توان دارند را بدست آورید .

مثال(۱) : $y = x^x$

در چند مرحله انجام میدهیم ابتدا از طرفین Ln می گیریم و....

$$(۱)\ \ln y = \ln x^x$$

$$(۲)\ \ln y = x \ln x$$

$$(۳)\ \frac{y'}{y} = (۱ \times \ln x + \frac{۱}{x} \times x) \rightarrow \frac{y'}{y} = (\ln x + ۱)$$

$$(۴)\ y' = y(\ln x + ۱)$$

$$(۵)\ y' = x^x(\ln x + ۱)$$

مثال(۲)

$$y = (۲x+۱)^{\sqrt{x}}$$

$$(۱)\ \ln y = \ln(۲x+۱)^{\sqrt{x}}$$

$$(۲)\ \ln y = \sqrt{x}\ \ln(۲x+۱)$$

$$(۳)\ \frac{y'}{y} = (\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times \ln(۲x+۱)) + (\frac{۲}{۲x+۱} \times \sqrt{x})$$

$$(۴)\ y' = y(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times \ln(۲x+۱)) + (\frac{۲}{۲x+۱} \times \sqrt{x})$$

$$(۵)\ y' = (۲x+۱)^{\sqrt{x}}(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times \ln(۲x+۱)) + (\frac{۲}{۲x+۱} \times \sqrt{x})$$

تمرینات مشتق:

۱) مشتق تابع $f(t)=\dfrac{\cos t}{۱-\sin t}$ را به ازای $t=\dfrac{\pi}{6}$ بدست آورید.

۲) مشتق سوم تابع $y=\dfrac{e^{۳x}-۱}{e^{x}-۱}$ در نقطه $x_0=\ln^2$ چقدر است؟

۳) اندازه مشتق دوم تابع $f(x)=xe^{-x}$ در نقطه x=-1 چقدر است؟

۴) تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>\frac{۱}{۴}\\ ax+b & x\le\frac{۱}{۴}\end{cases}$ در نقطه $x=\frac{۱}{۴}$ مشتق پذیر است ، b را پیدا کنید.

۵) در تابع $f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+b & x\ge ۱\\ \frac{۱}{x} & x<۱\end{cases}$ اگر $f'(1)$ موجود باشد a و b را پیدا کنیم.

۶) اگر $f(x)=(۲x-۱)(\sqrt{x})$ آنگاه $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ چقدر است؟

۷) اگر $\dfrac{۲}{۳}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ باشد مشتق $f(\sqrt{x})$ به ازای x=4 کدام است؟

۸) مشتق $\tan^{-۱}(\frac{۲}{x})$ را در نقطه $x_0=3$ بدست آورید.

۹) مقدار y' را در تابع ضمنی $x^{۲}-۲x^{۲}y^{۲}+۵x+y-۵=۰$ به ازای x=1 و $y=\dfrac{-۱}{۲}$ بدست آورید.

۱۰) اگر $y=۳x^{۲}-۵x+۱$ و $x=t^{۳}+۲t+۳$ باشد مقدار $\dfrac{dy}{dt}$ در t=1 را بدست آورید. $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\times\dfrac{dx}{dt}$

۱۱) اگر $f(x)=\sin^{-۱}(\cos x)$ و $۰<x<\dfrac{\pi}{۲}$ باشد،مقدار $f'(x)$ را بدست آورید.

۱۲) اگر $y=t^{۲}-t$ و $x=t^{۴}+t$ باشد مقدار $\dfrac{dy}{dx}$ به ازای t=1 چقدر است؟ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

کاربرد مشتق (۱):   بدست آوردن نقاط اکسترمم:

تذکر: اگر نقطه x=c طول نقطه Max یا Min تابع f باشد گوییم تابع در نقطه c دارای اکسترمم است.

*برای بدست آوردن نقاط اکسترمم ابتدا مشتق تابع را مساوی صفر قرار داده ، تا طول نقطه اکسترمم بدست آید و سپس مشتق را تعیین علامت می کنیم. اگر y'>0 باشد تابع صعودی و اگر y'<0 باشد تابع نزولی است.

مثال: نقاط اکسترمم تابع $y = x^3 - 3x^2 + 6$ را بدست آورید.

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \to 3x(x-2) = 0 \begin{cases} 3x = 0 \to x = 0 \\ x - 2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$$

$x = 2 \to y = 8 - 12 + 6 = 2$ Min(2,2) $x = 0 \to y = 0 - 0 + 6 = 6$ Max(0,6)

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $y = 2ax^3 - 4bx$ در نقطه $A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ دارای اکسترمم باشد.

حل: مختصات نقطه A در تابع صدق می کند بنابراین :

$$2 = 2a(1)^3 - 4b(1)$$
$$2 = 2a - 4b \qquad (1)$$

از طرفی مشتق به ازای طول نقطه اکسترمم مساوی صفر است بنابر این :

$$y' = 6ax^2 - 4b \xrightarrow{x=1} 6a - 4b = 0 \qquad (2)$$

۱ و ۲ را در یک دستگاه حل می کنیم :

$$\begin{cases} 2a - 4b = 2 \\ 6a - 4b = 0 \end{cases} \qquad a = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad b = \frac{-3}{4}$$

تمرین: مقادیر a و b چقدر باشند تا نقطه A(1,2) ماکزیمم نسبی تابع $y = x^3 + ax^2 + b$ باشند.

$$b = \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad a = \frac{-3}{2}$$

نقاط بحرانی:

نقطه به طول C را نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه f در C تعریف شده باشد و دارای یکی از دو شرط زیر باشد:

۱) $f'(c) = 0$ ← بنابراین هر اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی نیز هست.

۲) $f'(c)$ موجود نباشد. ← بنابراین هر نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم تابع نباشد.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.   الف) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3}$

$$y' = \frac{2x(x^2-3) - 2x(x^2-2)}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x}{(x^2-3)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \to x = 0$$

به ازای $x = \pm\sqrt{3}$ (ریشه های مخرج) مشتق وجود ندارد ولی چون تابع f در این نقاط تعریف نشده است پس این نقاط نقاط بحرانی تابع f نیستند.

ب) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

در این نقاط مشتق وجود ندارد $1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

بنابراین نقاط بحرانی تابع عبارتند از $x = 0,-1,1$

تمرین: نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را مشخص کنید.

توجه: تابع باید در نقطه بحرانی تعریف شده باشد. جواب ← x=0,1

طریقه به دست آوردن Min و Max مطلق تابع در بازه [a,b] :

الف) ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست می آوریم.

ب) مقدار تابع f را در نقاط بحرانی حساب می کنیم.

ج) f(b),f(a) را تعیین می کنیم.

د) از مقادیر بدست آمده در مراحل ب و ج ، بیشترین مقدار Max مطلق و کمترین مقدار Min مطلق تابع است.

مثال: مقادیر Min و Max مطلق تابع $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ را روی بازه [-2,4] بدست آورید.

جواب : Max=196 Min=0

نقطه عطف :

نقطه ای از منحنی تابع است که در آن جهت تقعر تابع عوض می شود.

آزمون مشتق دوم جهت شناختن طبیعت نقاط بحرانی :

ابتدا مشتق تابع را حساب کرده و مساوی صفر قرار می دهیم تا نقطه یا نقاط بحرانی مشخص شود.

فرض می کنیم x_0 یک نقطه بحرانی باشد یعنی f'(x)=0 آنگاه داریم:

$y''(x_0) < 0 \rightarrow$ جهت تقعر منحنی رو به پایین است.

$y''(x_0) = 0 \rightarrow$ جهت تقعر منحنی عوض می شود.

$y''(x_0) > 0 \rightarrow$ جهت تقعر منحنی رو به بالا است.

توجه: همانطور که ملاحظه می کنید ، مشتق دوم تابع در طرفین نقطه عطف تغییر علامت می دهد.

مثال: با استفاده از مشتق دوم ، نقاط اکسترمم تابع $y = x^3 - 3x + 2$ را به دست آورید.

X=+1 Min , X=-1 Max

تمرین: آیا نقطه (0,2) نقطه عطف تابع $y = x^4 - 3x + 2$ است؟ بله

تمرین: اگر نقطه M(1,3) نقطه عطف تابع $y = x^3 + ax^2 + b$ باشد a و b را بیابید.

جواب : b=5 و a=-3

کاربرد مشتق (۲): (بدست آوردن معادلات خط مماس و خط قائم بر منحنی)

نکته: مشتق به ازای طول نقطه مماس می شود ضریب زاویه خط مماس

اگر نقطه A(a,b) نقطه مماس باشد آنگاه داریم :

شیب خط مماس $f'(a)=m$

معادله خط مماس $y-b=m(x-a)$ معادله خط قائم $y-b=-\frac{۱}{m}(x-a)$

تمرین: معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی تابع $x^۲y^۲+x-y-۱=۰$ را در نقطه A(1,1) بدست آورید.

تمرین: معادله خط قائم بر منحنی تابع $y=\sqrt{x}$ را در نقطه به طول X=4 بدست آورید.

مثال: ازنقطه p(1,-2) چندمماس برمنحنی $y=\frac{۱}{۴}x^۲$ می توان رسم نمود؟(نقطه p خارج منحنی قرار دارد)

حل: فرض می کنیم نقطه A(a,f(a)) نقطه مماس باشد.

$$\left.\begin{array}{l} f'=\frac{۱}{۲}x \to f'(a)=\frac{۱}{۲}a=m \\ f(a)=\frac{۱}{۴}a^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow A(\frac{a}{۲},\frac{a^۲}{۴})$$

معادله خط مماس: $y-y_۱=m(x-x_۱)$ $\Rightarrow y-\frac{a^۲}{۴}=\frac{a}{۲}(x-a)*$

از طرفی چون نقطه p روی خط مماس قرار دارد لذا مختصاتش در معادله خط صدق می کند و داریم:

$$-۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{a}{۲}(۱-a)\Rightarrow -۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{a}{۲}-\frac{a^۲}{۲}=\frac{a-a^۲}{۲}$$

طرفین را ضربدر ۴ می کنیم و داریم $\leftarrow$ $-۸-a^۲=۲a-۲a^۲$

$$a^۲-۲a-۸=۰ \to (a-۴)(a+۲)=۰ \begin{cases} a=۴ \\ a=-۲ \end{cases}$$

به جای a مقدار قرار می دهیم

$$\begin{cases} (۱) & a=۴ \to y-۴=۲(x-۴) \\ (۲) & a=-۲ \to y-۱=-(x+۲) \end{cases}$$ معادلات خط مماس

تمرین: از نقطه $p(\text{۰},\frac{\text{۳}}{\text{۲}})$ قائم هایی بر منحنی تابع $y=x^2$ رسم کرده ایم.مطلوبست معادله این قائم ها.

جواب: $y=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x+\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$ $\qquad$ $y=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x+\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$

کاربرد ۳ دیفرانسیل :

میدانیم $\lim\limits_{\Delta x \to \text{۰}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ برابر مشتق تابع است . یعنی : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

حال با فرض $\Delta y = dy$, $\Delta x = dx$ دیفرانسیل تابع را بصورت زیر تعریف می کنیم .

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \Rightarrow dy=f'(x)dx$$

یا $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x).dx$

از این فرمول برای محاسبه مقادیر عددی استفاده می کنیم .

مثال : مقدار تقریبی $\sqrt[\text{۵}]{\text{۳۷}}$ را بدست آورید .

$$f(x+\Delta x)=\sqrt[\text{۵}]{\text{۳۷}}$$

$$f(x)=\sqrt[\text{۵}]{x} \to f'(x)=\frac{\text{۱}}{\text{۵}\sqrt[\text{۵}]{x^{\text{۴}}}}=$$

$$\frac{\text{۱}}{\text{۵}\sqrt[\text{۵}]{(\text{۲}^{\text{۵}})^{\text{۴}}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۵}\sqrt[\text{۵}]{(\text{۲}^{\text{۴}})^{\text{۵}}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۸۰}}$$

$$\text{۲}^{\text{۵}}<\text{۳۷}<\text{۳}^{\text{۵}}$$

$$x=\text{۳۲} \qquad \to \Delta x=\text{۵}$$

$$x+\Delta x=\text{۳۷}$$

$$\sqrt[\text{۵}]{\text{۳۷}}=f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).dx$$

$$=\sqrt[\text{۵}]{\text{۲}^{\text{۵}}}+\frac{\text{۱}}{\text{۸۰}}\times\text{۵}\approx\text{۲/۶}$$

تمرین : با استفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt[\text{۴}]{\text{۲۳}}$ را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید .

جواب $=\text{۲/۲۱}$

مثال : مقدار تقریبی $Sin۴۶°$ را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید .

$$Sin۴۵° < Sin۴۶° < Sin۶۰°$$
$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$x = ۴۵°$$
$$x + \Delta x = ۴۶° \to \Delta x = ۱°$$

$$f(x) = Sinx \to f'(x) = Cosx = Cos۴۵° = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$Sin۴۶° = f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x).dx = Sin۴۵° + Cos۴۵° \times ۰/۰۱۷$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to ۱° = \frac{\pi}{۱۸۰} \xrightarrow{\pi \approx ۳} = \frac{۱}{۶۰} = ۰/۰۱۷ \qquad = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۰/۰۱۷ \approx ۰/۷۱۱۹$$

تمرین : بااستفاده از دیفرانسیل مقدار تقریبی $Cos۶۱°$ را حساب کنید

جواب $\approx ۰/۴۹$

کاربرد ۴ مسائل بهینه سازی :

مثال : اگر حاصلضرب دو عدد مساوی ۱۰ باشد ، می نیمم مجموع این دو چقدر است ؟

$$\left.\begin{array}{r} P=x+y \\ xy=۱۰ \rightarrow y=\dfrac{۱۰}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow P=x+\frac{۱۰}{x} \rightarrow P'=۱-\frac{۱۰}{x^۲}=\frac{x^۲-۱۰}{x^۲}$$

$$P'=۰ \Rightarrow x^۲-۱۰=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۰}$$

حال باید P' را تعیین علامت کنیم تا نقطه می نیمم را تشخیص دهیم .

(چون مخرج نامنفی است لذا فقط صورت P' را تعیین علامت می کنیم .)

x	$-\infty$	$-\sqrt{۱۰}$	$\sqrt{۱۰}$	$+\infty$
y'	$+$	$-$		$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

بنابر این می منیمم تابع به ازای $x=\sqrt{۱۰}$ بدست می آید .

$$P(x)=x+\frac{۱۰}{x} \rightarrow P(\sqrt{۱۰})=\sqrt{۱۰}+\frac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۱۰}}$$

تمرین ۱:

ابعاد مستطیلی را پیدا کنید تا محیط آن حداقل و مساحت آن ۳۶ باشد . جواب $x=y=۶$

تمرین۲ :

اگر بین شعاع قاعده (r) و ارتفاع (h) استوانه ای رابطه $r+h=۱۵$ باشد ، شعاع قاعده چقدر باشد تا سطح جانبی استوانه ماکزیمم گردد ؟ جواب $r=۷/۵$ (توجه : سطح جانبی $S=۲\pi rh$)

تمرین۳ :

اگر $x+y=۴$ باشد حداکثر مقدار $A(x)=x^۲-۲y^۲$ چقدر است ؟

جواب $=۳۲$

تمرین۴ :

اگر یک قوطی استوانه ای به حجم ماکزیمم از یک صفحه فلزی به مساحت $۱۵۰\pi\,Cm^۲$ بسازیم حجم این استوانه چند $Cm^۳$ است ؟

راهنمایی : سطح کل $=۲\pi rh+۲\pi r^۲$ (جواب : $r=۵$, $V=۲۵۰\pi Cm^۳$)

قاعده هوپیتال :

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}$$

هر گاه در محاسبه حد به حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برسیم از قاعده هوپیتال استفاده می کنیم .

مثال : حد های زیر را حساب کنید .

آ) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \frac{-1^3+1}{-1+1} = \frac{0}{0}$ $\qquad \lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{1} = 3$

ب) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ $\qquad$ هوپیتال : $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0$

ج) $\lim_{x \to 0} \frac{Cosx-1}{x^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-Sinx}{2x} = \frac{-1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{Sinx}{x} = \frac{-1}{2} \times 1 = \frac{-1}{2}$$

د) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{3x+1}-1} = \frac{0}{0}$ $\qquad$ جواب $= \frac{1}{3}$ $\qquad$ بعنوان تمرین حل کنید

ه) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1+Cos2\pi x}{(2x-1)^2} = \frac{0}{0}$

راهنمایی : دوبار باید از هوپیتال استفاده کنید .

) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{\infty}{\infty} \longrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cot 3x}}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot 3x} = \frac{0}{0}$ $\qquad$ تبدیل به : $\frac{0}{0}$

هوپیتال : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-1(1+\cot^2 x)}{-(1+\cot^2 3x)} = \frac{1}{3}$

توجه : توابع مثلثاتی که حد آنها $\frac{\infty}{\infty}$ است حتما باید به $\frac{۰}{۰}$ تبدیل کنیم .

تذکر : اگر حالت مبهم بصورت $۰\times\infty$ باشد بصورت زیر تغییر شکل می دهیم تا به حالت $\frac{۰}{۰}$ تبدیل گردد .

$$\frac{\text{عامل صفر}}{\frac{۱}{\text{عامل بی نهایت}}}$$

مثال : $\lim_{x\to\pi}(۱-\sin\frac{x}{۲})\tan\frac{۳x}{۲}=۰\times\infty$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\sin\frac{x}{۲}}{\frac{۱}{\tan\frac{۳x}{۲}}}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\sin\frac{x}{۲}}{\cot\frac{۳x}{۲}}=\frac{۰}{۰}$$

هوپیتال : $\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{-(۱+\cot^{۲}\frac{۳x}{۲})}=\frac{۰}{-۱}=۰$

تمرین : $\lim(۲-x)\tan\frac{\pi x}{۴}=۰\times\infty$

تمرین : $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\tan ۲x\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\infty\times۰$

جواب $=\frac{۱}{۲}$

$$\lim_{x\to۰}\frac{e^{x}-۱}{۲x}$$

$$\lim_{x\to۱^{-}}\frac{\cos^{-۱}x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

دو قضیه از مشتق:

قضیه رول: هرگاه تابع f(x) در فاصله [a,b] پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر باشد و f(a)=f(b) ، آنگاه حداقل یک $C \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f'(c) = ۰$ باشد.

مثال۱: C قضیه اول را برای تابع $f(x) = x^{۳} - ۹x$ در فاصله [-3,3] بیابید. جواب: $C = \sqrt{۳}$

مثال۲: در تابع $f(x) = e^{x} + e^{۳-x}$ اگر $x \in [۰,۳]$ باشد ، مقدار C قضیه اول را بیابید. جواب: $C = \frac{۳}{۲}$

نکته: از قضیه رول می توان نتیجه که اگر f تابعی مشتق پذیر باشد بین هر دو ریشه معادله $f(x) = ۰$ حداقل یک نقطه اکسترمم وجود دارد که $f'(x) = ۰$ باشد.

قضیه مقدار میانگین:

هرگاه تابع f(x) در فاصله [a,b] پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه حداقل یک $C \in (a,b)$ وجود دارد بطوریکه $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ باشد.

مثال۱: C قضیه لاگرانژ (میانگین) را برای تابع $f(x) = x + \sin x$ در فاصله $[۰,\pi]$ بدست آورید. جواب: $c = \frac{\pi}{۲}$

مثال۲: برای تابع $f(x) = \sin x - \frac{x}{۴}$ در بازه $[\frac{-\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}]$ ، C قضیه لاگرانژ رابدست آورید. جواب: $C = \frac{\pi}{۲}$

مثال۳: مقدار C مربوط به قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x) = \frac{۲}{x + ۳}$ وقتی که $۰ \le x \le ۱$ را پیدا کنید.

جواب: $C = ۲\sqrt{۳} - ۳$

انتگرال

تابع اولیه: تابع f(x) را یک تابع اولیه برای تابع f(x) گویند هرگاه داشته باشیم: $F'(x) = f(x)$

انتگرال نامعین: عمل رسیدن از دیفرانسیل یک تابع یعنی f(x)dx با تابع اولیه آن یعنی F(x) را انتگرال گیری نا معین می نامند.

به C ثابت انتگرال گفته می شود. $\int f(x)dx = F(x) + c$

****تذکر****

یک تابع مشخص مانند f(x) می تواند تابع اولیه زیادی داشته باشد که اختلاف آنها در ثابت c می باشد.

**فرمول های انتگرال گیری:

	فرمول های انتگرال گیری:	مثال
۱	$\int dx = x + c$	$\int -۳\,dx = -۳x + c$
۲	$\int Kdx = Kx + c$	$\int \sqrt{۲}\,dx = \sqrt{۲}\,x + c$
۳	$\int x^n dx = \frac{۱}{n+۱}x^{n+۱} + c$	$\int x^{۳} dx = \frac{۱}{۴}x^{۳} + c$
مثال	$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{۱}{۲}}dx = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}+۱}x^{\frac{۱}{۲}+۱} + c = \frac{۲}{۳}\sqrt{x^{۳}} + c$	
تمرین	$\int \sqrt[۳]{x^{۲}}\,dx = ?$	
۴	$\int K\,x^n\,dx = \frac{K}{n+۱}x^{n+۱} + c$	$\int ۲x^{۳}\,dx = \frac{۲}{۴}x^{۴} + c$
۵	$\int \frac{dx}{x} = Ln\,\lvert x\rvert + c$ $\int \frac{du}{u} = Ln\lvert u\rvert + c$	$\int \frac{۲x}{x^{۲}+۱}dx = Ln\lvert x^{۲}+۱\rvert + c$
مثال	$\int \frac{۱}{x^{۲}}dx =$	$\int \frac{۲x+۳}{x^{۲}}dx =$
مثال	$\int \frac{x}{x-۱}dx =$	
مثال	$\int \frac{x}{x^{۲}+۱}dx =$	

۶	$\int k\,(ax+b)^n = \frac{k}{(n+۱)}(ax+b)^{n+۱}+c$
مثال	$\int ۳(۱-۲x)^۵ dx = \frac{۳}{-۲(۵+۱)}(۱-۲x)^۶+c = \frac{-۱}{۴}(۱-۲x)^۶+c$

تمرین	$\int (۵x-۷)^۳ dx$	
تمرین	$\int \frac{۵}{۴\sqrt{۲x+۱}}dx$	
۷	$\int K u' u^m\, dx = \frac{k}{m+۱}u^{m+۱}+c$	
مثال	$\int ۳x^۲(x^۳-۱)^۲dx = \frac{۱}{۳}(x^۳-۱)^۳+c$	
تمرین	$\int x^۲\sqrt{x^۳+۱}\,dx$	
تمرین	$\int \frac{۲dx}{x^۲\sqrt{۳+\frac{۱}{x}}}=$	
تمرین	$\int \frac{Ln^۵x}{x}dx=$	
تمرین	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}dx=$	نتیجه : $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}dx=۲\sqrt{x}+c$
تمرین	$\int \frac{۲x}{\sqrt{x^۲-۱}}dx=$	نتیجه : $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}dx$ یا $\int \frac{du}{\sqrt{u}}=۲\sqrt{u}+c$
مثال	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}=\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۱+\frac{x}{\sqrt{x}})}=\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}=\int \frac{\frac{۱}{\sqrt{x}}}{۱+\sqrt{x}}dx=۲Ln\|۱+\sqrt{x}\|+c$	
تمرین	$\int Sin۲x(۱+Sin^۲x)^۳dx=?$	

قضیه: اگر f(x) و g(x) دو تابع پیوسته حقیقی و a یک عدد حقیقی باشد ، داریم:

$۱ - \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$	
$۲ - \int a \,.\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$	
مثال	$\int \frac{x^{۴} - ۳x^{۳} + ۱}{x^{۲}} dx = \int \frac{x^{۴}}{x^{۲}} - \frac{۳x^{۳}}{x^{۲}} + \frac{۱}{x^{۲}} dx = \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{۳}{۲} x^{۲} - \frac{۱}{x} + c$
تمرین	$\int \frac{۲x^{۳} - ۳x - ۲}{x^{۲}} dx = ?$
مثال	$\int \frac{x^{۳} \sqrt[۳]{x^{۲}}}{\sqrt[۵]{x^{۳}}} dx = \int x^{۳} \times x^{\frac{۲}{۳}} \times x^{\frac{-۳}{۵}} dx = \int x^{\frac{۴۶}{۱۵}} dx = \frac{۱}{۱ + \frac{۴۶}{۱۵}} x^{۱ + \frac{۴۶}{۱۵}} + c$ $= \frac{۱۵}{۶۱} \sqrt[۱۵]{x^{۶۱}} + c = \frac{۱۵}{۶۱} x^{۴} \sqrt[۱۵]{x}$
تمرین	اگر $F(x) = \int \frac{۵x^{۲} + ۲x + ۱}{۷x} dx$ باشد و $C = ۰$ مقدار $F(۱)$ را حساب کنید.
تمرین	مشتق تابعی در هر نقطه از منحنی برابر با $۳x^{۲} - ۴x$ است معادلهٔ منحنی تابع را بیابید در صورتیکه ، از نقطهٔ (۲و۱) بگذرد $\frac{dy}{dx} = ۳x^{۲} - ۴x \rightarrow dy = (۳x^{۲} - ۴x)dx = ...$

روش تغییر متغیر: با استفاده از تغییر متغیر میتوان یک انتگرال بیجیده را به یک انتگرال ساده تر تبدیل کرد

مثال	$\int ۷x(۴x^{۲}+۳)^{۳}dx \qquad ۴x^{۲}+۳=t \rightarrow dt=۸xdx \rightarrow dx=\frac{dt}{۸x}$
	$\int ۷x\, t^{۳} \times \frac{dt}{۸x} = \int \frac{۷}{۸} t^{۳} dt = \frac{۷}{۸}\int t^{۳} dt = \frac{۷}{۸}\int t^{۳} dt = \frac{۷}{۸}(\frac{۱}{۴}t^{۴})+c$ $= \frac{۷}{۳۲}(۴x^{۲}-۳)^{۴}+c$
تمرین۱	$\int (۲x+۳)^{۳} dx$
تمرین۲	$\int \frac{x\,dx}{۱+x^{۲}} \qquad ۱+x^{۲}=t$
تمرین۳	$\int \frac{۳x}{۵x^{۲}+۷}dx \qquad ۵x^{۲}+۷=t$
تمرین۴	$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad \sqrt{x}=t$
تمرین۴	$\int x\sqrt{۲-x^{۲}}dx \qquad ۲-x^{۲}=t$

۵) $\int \frac{dx}{xLnx} \qquad Lnx=t$	۷) $\int \frac{۳x+۴}{\sqrt{x+۱}}dx$
۶) $\int \frac{۳dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+۱)^{۴}} \qquad \sqrt{x}+۱=t$	۸) $\int \frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx \qquad ۱-x^{۲}=t$

انتگرال های مثلثاتی:

انتگرال های مثلثاتی:		
۱	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	۲ $\int Sin\, x\, dx = -Cos\ x + c$
۳	$\int k\ \sin ax\, dx = \frac{-k}{a} \cos ax + c$	$\int ۳\ \sin\ ۲x\ dx = \frac{-۳}{۲} \cos\ ۲x + c$
۴	$\int k\ \cos ax\, dx = \frac{k}{a} \sin\ ax + c$	*** $\int -۲\ \cos ۳x\, dx = \frac{-۲}{۳} \sin ۳x + c$
۵	$\int \tan ax\ dx = \frac{-۱}{a} Ln\ \lvert \cos ax \rvert + c$	*** $\int \frac{dx}{Cos^۲ x} = \tan x + c$
۶	$\int \cot\ ax\ dx = \frac{۱}{a} Ln\ \lvert \sin\ ax \rvert + c$	$\int \frac{dx}{Sin^۲ x} = -Cot\ x + c$
۷	$\int \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \sin^{-۱} x + c = -\cos^{-۱} x + c$	
۸	$\int \tan^۲ x\ dx = \int (۱ + \tan^۲ x) - ۱\, dx = \tan\ x - x + c$	
۹	$\int Cot^۲ x\ dx = \int (۱ + Cot^۲ x) - ۱\, dx = -\cot - x + c$	
۱۰	$\int \frac{dx}{۱ + x^۲} = \tan^{-۱} x + c = -\cot^{-۱} x + c$	

$$\int \frac{dx}{a^۲ + x^۲} = \int \frac{dx}{a^۲(۱ + \frac{x^۲}{a^۲})} = \int \frac{a\,dt}{a^۲(۱+t^۲)} = \frac{۱}{a}\int \frac{dt}{۱+t^۲} = \frac{۱}{a}\tan^{-۱} + c = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a} + c$$

مثال

$\frac{x}{a} = t \rightarrow dt = \frac{۱}{a} dx$

$: dx = adt$

تمرین:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} = ?$$

جواب

$$\frac{۱}{a} \sin^{-۱} \frac{x}{a} + c$$

تمرین:

$$\int \frac{e^x}{۴ + e^{۲x}} dx \qquad e^x = t$$

تمرین: فرمول ۷ را ثابت کنید.

$x = \sin\ t \rightarrow dx = \cos\ t\ dt$

$t = Sin^{-۱} x$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} = \int \frac{\cos t}{\sqrt{۱-\sin^{۲} t}} dt = \int \frac{\cos t}{\cos t} dt = \int dt = t + c = \sin^{-۱} x + c$$

بطور مشابه اگر $x = \cos t$ بگیریم ثابت میشود $-\cos^{-1} x + c$

تمرین:

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \qquad t = \sqrt{x}$$

جواب: $-۲ \cos \sqrt{x} + c$

تمرین:

$$\int \frac{\sin x}{۲ + \cos x} dx \qquad t = ۲ + \cos x$$

جواب: $-Ln|۲ + \cos x| + c$

تمرین:

$$\int \sqrt[۳]{\sin x} \cos x \, dx \qquad t = \sin x \to dt = \cos x \, dx \Rightarrow dx = \frac{\cos x}{dt}$$

$$= \int \sqrt[۳]{t} \, dt = \int t^{\frac{۱}{۳}} dt = \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۳}} t^{۱ + \frac{۱}{۳}} + c = \frac{۳}{۴} t^{\frac{۴}{۳}} + c$$

$$= \frac{۳}{۴} \sqrt[۳]{\sin^{۴} x} + c = \frac{۳}{۴} \sin x \sqrt[۳]{\sin x} + c$$

تمرین:

$$\int Sin ۲x (۱ + Sin^{۲} x)^{۳} \, dx$$

تمرین:

$$\int \cos x \sin^{3} x \, dx$$

$$\sin x = u$$

$$\int (۱+\tan^{۲} ax)dx = \int \frac{۱}{\cos^{۲} ax}dx = \int \sec^{۲} ax\, dx = \frac{۱}{a}\tan ax + c$$ -۱۱

$$\int (۱+\cot^{۲} ax)dx = \int \frac{۱}{\sin^{۲} ax}dx = \int \csc^{۲} ax\, dx = -\frac{۱}{a}\cot ax + c$$ -۱۲

تمرین: راهنمایی:با استفاده از فرمول $\sin x = \frac{۲\tan x/۲}{۱+\tan^{۲} x/۱}$ وتغییرمتغیر $t=\tan x/2$ انتگرال زیر را ثابت کنید

$$\int \frac{dx}{\sin x} = Ln\left|\tan \frac{x}{۲}\right| + c$$

تمرین: با استفاده از فرمول $\cos x = \frac{۱-\tan^{۲} x/۲}{۱+\tan^{۲} x/۲}$ انتگرال را ثابت کنید

$$\int \frac{dx}{\cos x} = Ln\left|\sec x + \tan x\right|$$

فرمولهای طلایی:

$$\cos ۲x = \cos^{۲} x - \sin^{۲} x$$

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^{۲} x \longrightarrow \sin^{۲} x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$$

$$\cos ۲x = ۲\cos^{۲} x - ۱ \longrightarrow \cos^{۲} x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

مثال:

$$\int \sin^{۲} x\, dx = \int \frac{۱-\cos ۲x}{۲}dx = \int \frac{۱}{۲}dx - \frac{۱}{۲}\int \cos ۲x\, dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴}\sin ۲x + C$$

تمرین: انتگرال های زیر را با استفاده از فرمول های طلایی حل کنید.

الف)

$$\int \cos^{۲} x\, dx$$

ب)

$$\int 12\sin^2 3x\, dx$$

جواب:

$$۶x - \sin ۶x + c$$

ج) $\int \sqrt{۲(۱+Cos\, x}\, dx$

د) $\int ۲ Sin^{۲} x Cos^{۲} x dx$

تمرین : انتگرال های زیر را حل کنید.   فرمول : $Sin\, a\, Cos\, b = \frac{۱}{۲}[Sin(a+b)+Sin(a-b)]$

الف) $\int \sin x \cos ۴x\, dx$

ب) $\int \sin ۵x \cos ۲x\, dx$

د) $\int \tan^{۳} x\, dx = \int \tan^{۳} x + \tan x - \tan x\, dx$

$= \int (\tan^{۳} x + \tan x)dx - \int \tan x\, dx = \int \tan x(\tan^{۲} x + ۱)dx - \int \tan x\, dx$

$= \int U\, du - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \frac{۱}{۲}u^{۲} + Ln|\cos x| + c = \frac{۱}{۲}\tan^{۲} x + Ln|\cos x| + c$

انتگرال تابع نمایی:

۱) $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{Ln\, a} + c$

۲) $\int e^{ax} dx = \frac{۱}{a} e^{ax} + c$

نکته:

عبارت زیر رادیکال را چون ضریب درجه دوم منفی است،به مربع کامل تبدیل میکنیم و جواب انتگرال به صورت $\sin^{-1} u$ بدست خواهد آمد.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{۷ - x^{۲} + ۶x}} = \sin^{-۱}\left(\frac{x-۳}{۴}\right) + c$$

نکته:

اگر در انتگرال گیری از توابع کسری که مخرج آنها $\Delta = 0$ باشد،عبارت را به صورت مربع کامل نوشته و توان آنرا منفی می کنیم و به صورت کسر منتقل نموده و انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{dx}{x^{۲} - ۱۰x + ۲۵} =$$

نکته: اگر در مخرج کسر $\Delta < 0$ باشد،مخرج کسر را به صورت مربع کامل نوشته و در نهایت جواب انتگرال به صورت $\tan^{-1}$ و یا $\cot^{-1}$ خواهد بود.

$$\int \frac{dx}{x^{۲} + ۴x + ۵} =$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء:

فرمول : $I = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

۱) هرگاه تابع انتگرال شونده به صورت حاصلضرب یک تابع (مثلثاتی یا نمایی) و یک تابع جبری باشد، تابع جبری را **u** فرض می کنیم.

مثال :

a) $I = \int x \cdot \cos x \cdot dx =$

b) $I = \int x \cdot \sin x \cdot dx =$

c) $I = \int x \cdot e^{x} dx =$

۲) اگر تابع انتگرال شونده به صورت حاصل ضرب یک تابع (لگاریتمی یا وارون مثلثاتی) و یک تابع جبری باشد معمولا تابع لگاریتمی یا وارون تابع مثلثاتی را **u** فرض می کنیم.

مثال :

a) $\int \tan^{-۱} x dx =$

b) $\int x^{۳} \ln x dx =$

c) $\int \frac{\ln x}{x} dx =$

۳) بین یک تابع مثلثاتی و یک تابع نمایی معمولا تابع مثلثاتی را **U** فرض می کنیم.

مثال :

a) $\int e^x \sin x \cdot dx$

b) $\int e^x \cos x \cdot dx$

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + c$$

فرمول

مثال :

a) $\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{-1-2}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + c = \frac{-1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + c$

b) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5} =$

c) $\int \frac{dx}{x^2-1} =$

تمرین: ....

a) $\int \frac{2dx}{1-x^2} =$

b) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

انتگرال گیری به روش کسرهای جزئی:

الف) درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد.

مثال:

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \int \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x-3}dx$$

برای پیدا کردن **A** و **B** به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = Ax-3A+Bx-2B = (A+B)x-3A-2B$$

$$2x+1 \equiv (A+B)x-3A-2B \Rightarrow \begin{cases} A+b=2 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=7 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-5}{x-2}dx + \int \frac{7}{x-3}dx = -5\ln|x-2| + 7\ln(x-3) + c$$

توجه : مثال های مربوط به فرمول بالا را می توان به روش کسرهای جزئی نیز حل کرد .

تمرین: انتگرال مقابل را به روش کسری اثبات کنید...

$$\int \frac{du}{u^{۲} - a^{۲}} = \frac{۱}{۲a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$$

«انتگرال معین و کاربردآن»

***** اولین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال :**

فرض کنیم تابع f روی بازه [a, b] پیوسته باشد و به ازای هر x متعلق به این بازه داشته باشیم :

$$F(X)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(t)=f(x)$$

یعنی اگر از تابع اولیه مشتق بگیریم ، تابع زیر انتگرال به دست می آید :

***** دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال :**

اگر **F** یک تابع اولیه برای تابع پیوسته **f** باشد داریم :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

مثال ۱ :

$$\int_{+۱}^{\sqrt{۳}}(x^۳-۳x)dx=\left[\frac{۱}{۴}x^۴-\frac{۳}{۲}x^۲\right]_{-۱}^{\sqrt{۳}}=$$

$$\left(\frac{۱}{۴}(\sqrt{۳})^۴-\frac{۳}{۲}(\sqrt{۳})^۲\right)-\left(\frac{۱}{۴}(+۱)^۴-\frac{۳}{۲}(+۱)^۲\right)=......$$

مثال ۲ :

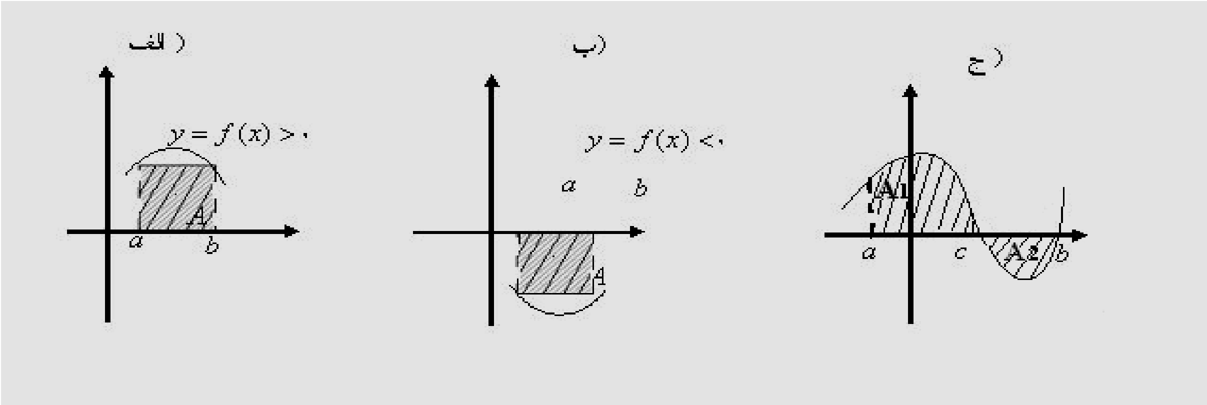
$$\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۴}}\left(\sin^۲ x-\cos^۲ x\right)dx=\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۴}}-\cos ۲x dx=\left[-\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right]_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۳\pi}{۴}}=$$

$$\frac{-۱}{۲}\left(\sin\frac{۳\pi}{۲}-\sin\pi\right)=\frac{-۱}{۲}(-۱-۰)=\frac{۱}{۲}$$

تمرین : $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}}\sin x\cos ۳x dx \rightarrow ....=\frac{-۳}{۱۶}$

راهنمایی : $\sin a\cos b=\frac{۱}{۲}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

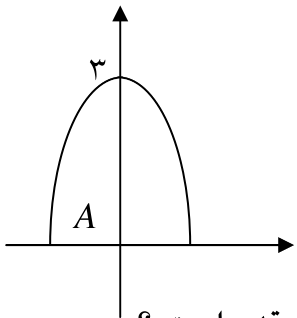
کاربرد ۱) محاسبه سطح محصور به نمودار **$y=f(x)$** و محور **x** ها و خطوط **$x=b$, $x=a$**



$A=\int_a^b f(x)dx$ $\qquad$ $A=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ $\qquad$ $A=A_۱+A_۲$

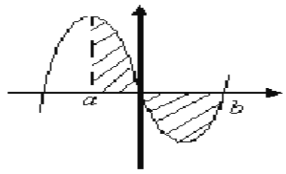
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

مثال : مساحت سطح محصور بین محور x ها و سهمی $y=3-3x^2$ را به دست آورید :



$$۳-۳x^۲=۰$$
$$۳(۱-x^۲)=۰\rightarrow ۱-x^۲=۰ x=\pm۱$$
$$A=\int_{-۱}^{۱}۳-۳x^۲dx=\left[۳x-x^۳\right]_{-۱}^{۱}=$$
$$(۳-۱)-(-۳+۱)=۴$$

مثال : مساحت سطح ها شورزاده زیر چقدر است ؟ $\qquad y=x۳-۳x$



$$x^۳-۳x=۰\rightarrow x(x^۲-۳)=۰\quad\begin{cases}x=۰\\x=\pm\sqrt{۳}\rightarrow b=\sqrt{۳}\end{cases}$$

برای بدست آوردن a ، باید مشتق را مساوی صفر قرار دهیم :

$$y'=۳x^۲-۳=۰$$
$$۳(x^۲-۱)=۰\rightarrow x=\pm۱\rightarrow a=-۱$$

بنابراین $A=\left|\int_{-۱}^{\sqrt{۳}}(x^۳-۳x)dx\right|=\left|\int_{-۱}^{۰}(x^۳-۳x)dx\right|+\left|\int_{۰}^{\sqrt{۳}}(x^۳-۳x)dx\right|=...$

چون صفر $x=0$ بین $a=-1$ و $b=\sqrt{۳}$ قرار دارد . جواب $\frac{۱۴}{۴}$

مثال : سطح محصور بین منحنی **$y=x^3-1$** و خطوط **$x=2,x=0$** و محور **x** ها را پیدا کنید .

جواب = $\frac{۷}{۲}$ توجه : $x=1$ جواب معادله $y=0$ ، بین 0 و ۲ قرار دارد .

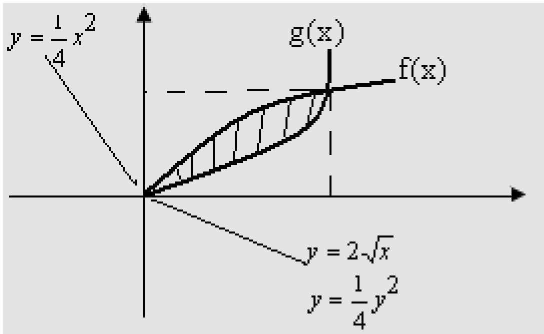
سطح محصور بین دو منحنی : $A=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right|$

توجه :

اگر نقاط b , a مشخص نشود این دو نقطه از حل معادله f(x)=g(x) به دست می آید . (معادله دو منحنی را تقاطع می دهیم)

مثال :

سطح محصور بین دو منحنی $\mathbf{x^2=4y}$, $\mathbf{y^2=4x}$ را بدست آورید :



$$\begin{cases} y^2=4x \\ x^2=4y \rightarrow y=\dfrac{x^2}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2=4x \end{cases}$$

$$\frac{x^4}{16}=4x \rightarrow x^4=64x$$

$$x^4-64x=0 \rightarrow x(x^3-64)=0$$

نتیجه اینکه: **x=4 ,** **x=0**

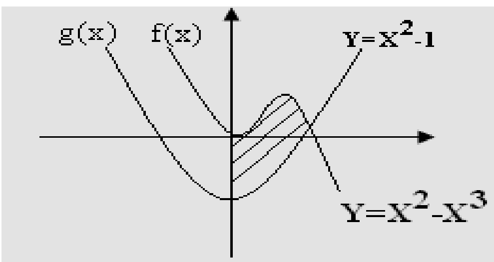
$$A=\left|\int_0^4 (2\sqrt{x}-\frac{1}{4}x^2)dx\right|=\left[\frac{2}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\times 3}x^3\right]_0^4$$

$$=\left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{12}x^3\right]_0^4=\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{16}{3}$$

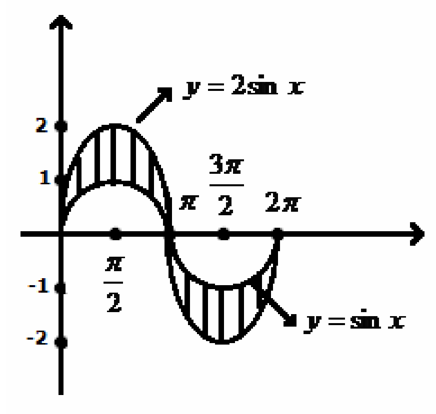
تمرین : مساحت محدود به دو سهمی $y=x^2-1$ و $y=-x^2+1$ را تعیین کنید :

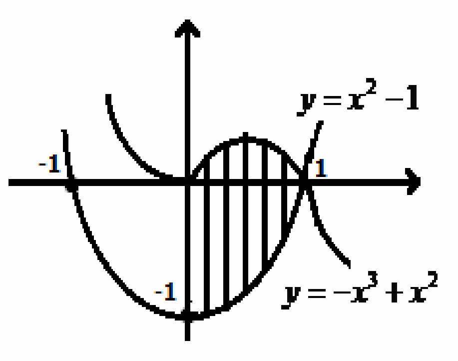
جواب = $\frac{8}{3}$

تمرین : مساحت سطح هاشور زده را بیابید : **جواب** = $\frac{3}{4}$



مطلوبست محاسبه مساحت ناحیه هاشور خورده:





کاربرد انتگرال ۲ :

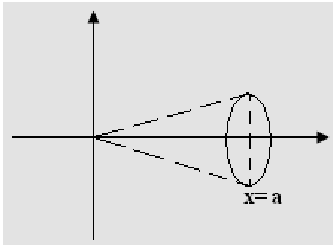
محاسبه حجم حادث از دوران سطح زیر منحنی y=f(x) حول محور x ها در فاصله x=b , x=a

ابتدا y^2 را حساب کرده و سپس آن را در π ضرب می کنیم و از $\pi y^{۲}$ انتگرال می گیریم .

$$V_a^b = \int_a^b \pi y^{۲}$$

مثال :

حجم حادث از دوران سطحی که محصور است بین خط y=mx و خط x=a حول محور x ها را بدست آورید :



$$y = mx \to y^{۲} = m^{۲}x^{۲}$$

$$V = \pi\int_{۰}^{a} m^{۲}x^{۲}dx = \pi\left[\frac{m^{۲}}{۳}x^{۳}\right]_{۰}^{a} = \frac{\pi}{۳}m^{۲}a^{۳}$$

تمرین : منحنی y=sin x را حول محور x ها و در فاصله $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دوران مسیر حجم حاصل را به دست آورید : جواب $\frac{\pi^{۲}}{٤}$

تمرین : نشان دهید که حجم کره ای به شعاع R مساوی $\frac{٤}{۳}\pi R^{۳}$ است .

توجه :

کره از دوران دایره $x^2+y^2=R^2$ حول محور x ها به دست می آید .

تمرین : حجم حادث از دوران سطح زیر منحنی $y = \sqrt{-٤x^{۲}+٤}$ و محور x ها چقدر است .

جواب $\frac{۱٦\pi}{۳}$

نکته :

معادله بیضی به مرکز o(0,0) که قطر بزرگ آن a ۲ و قطر کوچک آن 2b باشد به صورت زیر است:

بیضی قائم	بیضی افقی
$\frac{x^{۲}}{b^{۲}}+\frac{y^{۲}}{a^{۲}}=۱$	$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$
$V=\frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$	$V=\frac{۴}{۳}\pi ab^{۲}$

کاربرد (۳) : محاسبه طول قوس منحنی:

طول قوس منحنی به معادله $y=f(x)$ در فاصله $[a,b]$ برابر است با: $L_a^b=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

مثال(۱): طول قوس منحنی به معادله $y=\sqrt{4-x^2}$ رادر فاصله $[-2,2]$ بدست آورید.

مثال(۲): طول قوس منحنی به معادله $y=x^{\frac{3}{2}}$ را از مبدا مختصات تا نقطه $x=\frac{20}{3}$ بدست آورید.